

KONU 6. ASİMPTOTİK EŞİTLİKLER

Tanım 6.1. Eğer $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı ise

$$f(x) = O(1), x \in [a, b]$$

olarak tanımlanır, yani

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b] \iff f(x) = O(1), x \in [a, b].$$

Benzer olarak,

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq M, \forall x \in [a, b] \iff f(x) = O(g(x)), x \in [a, b]$$

yazılır. Aynı şekilde

$$\left| \frac{f(x) - \varphi(x)}{g(x)} \right| \leq M, \forall x \in [a, b] \iff f(x) = \varphi(x) + O(g(x)), x \in [a, b]$$

gibi tanımlanır. Eğer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ mevcut ve sınırlı ise, bu özellik

$$f(x) = O(1), x \rightarrow a$$

asimptotik eşitliği ile yazılır.

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow \infty$$

ve

$$f(x) = \varphi(x) + O(g(x)), x \rightarrow -\infty$$

benzer biçimde tanımlanır.

$O(1)$ asimptotik ifadesinden farklı olarak, $o(1)$ asimptotik ifadesi sıfıra yakınsama anlamında kullanılır.

$$f(x) = o(1), x \rightarrow \infty \iff \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Aynı şekilde

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a$$

ve

$$f(x) = \varphi(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$$

tanımlanır.

Soru 6.2.

$$\cos x = 1 + O(x^2), x \rightarrow 0$$

asimptotik eşitliğini ispatlayınız.

Çözüm.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{2x} \right) = -\frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = O(1), x \rightarrow 0 \iff \cos x = 1 + O(x^2), x \rightarrow 0$$

bulunur.

Soru 6.3.

$$f(x) = 1 + o(x), x \rightarrow 0$$

ise, $f^2(x)$ fonksiyonunun $x \rightarrow 0$ için asimptotiğini bulunuz.

Çözüm.

$$f^2(x) = [1 + o(x)]^2 = 1 + 2o(x) + o(x^2) = 1 + o(x) + o(x^2) = 1 + o(x), x \rightarrow 0$$

bulunur.

Alıştırmalar

1.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3), x \rightarrow 0$$

olduğunu ispatlayınız.

2.

$$x \arctan x - \frac{\pi}{2}x + \beta = o(1), x \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gerçekleşiyorsa, β kaç olmalıdır?

3.

$$f(x) = 1 + o(x), x \rightarrow 0$$

ise, $\sqrt{f(x)}$ fonksiyonunun $x \rightarrow 0$ için asimptotiğini bulunuz.

4.

$$\ln(1 + x) = x + O(x^2), x \rightarrow 0$$

eşitliğinin doğruluğunu ispatlayınız.

5.

$$\frac{x}{1 + x^3} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow \infty$$

olduğunu gösteriniz.