

KONU 8. JOST ÇÖZÜMÜNÜN x DEĞİŞKENİNE GÖRE ASİMPOTOTİĞİ

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)e^{i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \quad (8.1)$$

Jost çözümünü göz önünde bulunduralım.

Teorem 8.1.

a) $e(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $x \rightarrow \infty$

b) $e_x(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [i\lambda + o(1)]$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $x \rightarrow \infty$

asimptotik eşitlikleri gerçeklenir.

İspat.

a) (8.1) eşitliğinden

$$e(x, \lambda)e^{-i\lambda x} - 1 = \int_x^\infty K(x, t)e^{i\lambda(t-x)} dt \quad (8.2)$$

elde ederiz.

$$\left| \int_x^\infty K(x, t)e^{i\lambda(t-x)} dt \right| \leq \int_x^\infty |K(x, t)| dt, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

olduğundan sonuncu eşitsizlikten

$$\int_x^\infty K(x, t)e^{i\lambda(t-x)} dt = o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \infty \quad (8.3)$$

gerçeklenir. (8.3) eşitliğini (8.2) denkleminde dikkate aldığımızda

$$e(x, \lambda)e^{-i\lambda x} - 1 = o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \infty$$

veya

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [1 + o(1)], \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \infty$$

elde ederiz.

b) (8.1) eşitliğinden

$$e_x(x, \lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda = -K(x, x) + \int_x^\infty K_x(x, t)e^{i\lambda(t-x)} dt$$

bulunur. Buradan

$$e_x(x, \lambda) = e^{i\lambda x} [i\lambda + o(1)], \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \infty$$

çıkar.

$$e(x, -\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty K(x, t)e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_- \quad (8.4)$$

fonksiyonu

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 \leq x < \infty$$

denklemini gerçektir.

Teorem 8.2.

a) $e(x, -\lambda) = e^{-i\lambda x} [1 + o(1)], \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-, x \rightarrow \infty$

b) $e_x(x, -\lambda) = e^{-i\lambda x} [-i\lambda + o(1)], \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-, x \rightarrow \infty$
eşitsizlikleri sağlar, burada

$$\overline{\mathbb{C}}_- := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$$

gibi tanımlanır.

İspat.

a) (8.4) eşitliğinden

$$e(x, -\lambda)e^{i\lambda x} - 1 = \int_x^\infty K(x, t)e^{i\lambda(x-t)} dt, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_- \quad (8.5)$$

elde edilir.

$$\left| \int_x^\infty K(x, t)e^{i\lambda(x-t)} dt \right| \leq \int_x^\infty |K(x, t)| dt, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$$

olduğundan

$$\int_x^\infty K(x, t)e^{i\lambda(x-t)} dt = o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_- \quad (8.6)$$

çıkır. (8.5) ve (8.6) dan istenilen asimptotik eşitlik elde edilir.

Alıştırmalar

1) Teorem 8.2 nin b) şıkkındaki asimptotik eşitliği ispatlayınız.

2)

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, & x \in [0, 1) \cup (1, \infty) \\ y(0) = 0 \\ y(1^+) = \gamma_1 y(1^-) \\ y'(1^+) = \gamma_2 y'(1^-), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, \gamma_1 \gamma_2 \neq 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin Jost çözümünü bulunuz.