KONU 9. JOST ÇÖZÜMÜNÜN λ DEĞİŞKENİNE GÖRE ASİMPTOTİĞİ

Teorem 9.1. Aşağıdaki asimptotik eşitlikler gerçeklenir:
1) $e(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left[1 + o(1)\right],\ x \in [0,\infty),\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \to \infty.$
2) $e_x(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left[i\lambda + O(1)\right],\ x \in [0,\infty),\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \to \infty.$
İspat. 1.

$$e(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - 1 = \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt,\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \tag{9.1}$$

eşitliğini kullanalım.
a) $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

$$A(x,t) = \begin{cases} 0 & ,\quad t \in (-\infty, x) \\ K(x,t) & ,\quad t \in [x,\infty) \end{cases}$$

olmak üzere

$$\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^\infty A(x,t)e^{i\lambda t}dt,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

elde edilir. $A(x,.) \in L_1(-\infty,\infty)$ olduğu açıktır. Fourier Dönüşümleri için Riemann-Lebesgue Lemmasına göre

$$\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^\infty A(x,t)e^{i\lambda t}dt = o(1),\ \lambda \to \pm\infty$$

bulunur. Sonuncu eşitlikten ve (9.1) eşitliğinden

$$\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt = o(1),\ x \in [0,\infty),\ \lambda \to \pm\infty \tag{9.2}$$

elde edilir.
b) $\lambda \in \mathbb{C}_+ := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ olsun.

$$\left|K(x,t)e^{i\lambda(t-x)}\right| \le |K(x,t)|,\ \lambda \in \mathbb{C}_+$$

olduğundan

$$I = \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt,\ \lambda \in \mathbb{C}_+$$

parametreye bağlı genelleştirilmiş integrali $\lambda \in \mathbb{C}_+$ için düzgün yakınsaktır. Buradan

$$\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt = o(1),\ x \in [0,\infty),\ \lambda \in \mathbb{C}_+,\ |\lambda| \to \infty \tag{9.3}$$

elde edilir. (9.1) – (9.3) ten

$$\int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt = o(1),\ x\in[0,\infty)\,,\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda|\to\infty$$

çıkar. Sonuncu eşitlikten ise ilk asimptotik eşitlik elde edilir.

2.

$$e_x(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda = -K(x,x) + \int_x^\infty K_x(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt \tag{9.4}$$

eşitliğini kullanalım. Benzer biçimde

$$\int_x^\infty K_x(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt = o(1),\ x\in[0,\infty)\,,\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda|\to\infty \tag{9.5}$$

bulunur.

$$K(x,x) = O(1), x\in[0,\infty)\,,\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda|\to\infty \tag{9.6}$$

olduğundan (9.4) – (9.6) asimptotik eşitliklerinden teoremdeki ikinci eşitlik elde edilir.

Alıştırma.

1)

$$\begin{aligned}
e(x,-\lambda) &= e^{-i\lambda x}\left[1+o(1)\right],\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_-,\ x\to\infty\\
e_x(x,-\lambda) &= e^{-i\lambda x}\left[-i\lambda+o(1)\right],\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_-,\ x\to\infty\\
e(x,-\lambda) &= e^{-i\lambda x}\left[1+o(1)\right],\ x\in[0,\infty)\,,\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_-,\ |\lambda|\to\infty\\
e_x(x,-\lambda) &= e^{-i\lambda x}\left[-i\lambda+O(1)\right],\ x\in[0,\infty)\,,\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_-,\ |\lambda|\to\infty
\end{aligned}$$

eşitliklerini ispatlayınız.