

KONU 11. JOST FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ

$e(x, \lambda)$ Jost çözümü olmak üzere

$$e(\lambda) := e(0, \lambda) = 1 + \int_0^{\infty} K(0, t)e^{i\lambda t} dt$$

fonksiyonuna Jost fonksiyonu denir.

Her $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$e(-\lambda) = \overline{e(\lambda)}$$

olduğu açıktır.

Teorem 11.1 Her $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $e(\lambda) \neq 0$ gerçekleşir.

İspat.

$$W[e(x, \lambda), e(x, -\lambda)] = -2i\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

olduğu biliniyor. Sonucu eşitlikten, her $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$e(\lambda)e'(0, -\lambda) - e(-\lambda)e'(0, \lambda) = -2i\lambda$$

olur.

$$e(\lambda)e'(0, -\lambda) - \overline{e(\lambda)}e'(0, \lambda) = -2i\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

bulunur ve buradan teoremin ispatı elde edilir.

Teorem 11.2 Her $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$-2i\lambda S(x, \lambda) = e(\lambda)\overline{e(x, \lambda)} - \overline{e(\lambda)}e(x, \lambda)$$

gerçekleşir.

İspat.

$$S(x, \lambda) = c_1 e(x, \lambda) + c_2 e(x, -\lambda), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (11.1)$$

eşitliğinden c_1 ve c_2 yi bulalım.

$$\begin{cases} c_1 e(\lambda) + c_2 \overline{e(\lambda)} = 0 \\ c_1 e'(0, \lambda) + c_2 \overline{e'(0, \lambda)} = 1 \end{cases}$$

sisteminden

$$c_1 = \frac{\overline{e(\lambda)}}{2i\lambda}, \quad c_2 = -\frac{e(\lambda)}{2i\lambda}$$

elde edilir. Sonucu eşitlikler (11.1) de dikkate alınarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$-2i\lambda S(x, \lambda) = e(\lambda)\overline{e(x, \lambda)} - \overline{e(\lambda)}e(x, \lambda), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Teorem 11.3

$$e(\lambda) = 1 + o(1), \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, |\lambda| \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gerçekleşir.

İspat.

$$e(\lambda) - 1 = \int_0^{\infty} K(0, t) e^{i\lambda t} dt$$

eşitliğini kullanalım.

a) $\lambda \in \mathbb{R}$ için Fourier dönüşümleri için Riemann-Lebesgue Lemmasından

$$e(\lambda) = 1 + o(1), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \rightarrow \pm\infty \quad (11.2)$$

elde edilir.

b) $\lambda \in \mathbb{C}_+$ için düzgün yakınsak integraller için integral içinde limite geçme özelliğinden

$$e(\lambda) = 1 + o(1), \lambda \in \mathbb{C}_+, |\lambda| \rightarrow \infty \quad (11.3)$$

çıkar. (11.2) ve (11.3) ten teoremin ispatı elde edilir.

Alıştırmalar.

1)

$$e(\lambda) = 1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, |\lambda| \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliğini ispatlayınız.

2)

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, & x \in [0, 1) \cup (1, \infty) \\ y(0) = 0 \\ y(1^+) = \gamma_1 y(1^-) \\ y'(1^+) = \gamma_2 y'(1^-) \end{cases}$$

sınır değer probleminin Jost fonksiyonunu bulunuz.

3) (11.4) sınır değer probleminin Jost fonksiyonu için Teorem 11.1 in benzerini ispatlayınız.