KONU 12. JOST FONKSİYONUNUN SIFIRLARI

Teorem 12.1. Jost fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ da sonlu sayıda sıfırı vardır.
İspat.

$$e(\lambda) = 1 + o(1), \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \ |\lambda| \to \infty$$

eşitliğinden Jost fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ daki tüm sıfırlarının kümesinin sınırlılığı elde edilir. Jost fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ da analitik olduğundan $e(\lambda)$ nın $\mathbb{C}_+$ daki sıfırlarının limit noktaları reel eksendedir. Teorem 11.1 den ve Bolzano teoreminden Jost fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ daki sıfırları kümesi sonludur.
Teorem 12.2 $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$ ve $e(\lambda_0) = 0$ ise

$$e(x, \lambda_0) = e_x(0, \lambda_0) S(x, \lambda_0)$$

sağlanır.
İspat. $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$, $e(\lambda_0) = 0$ olsun.

$$W\left[e(x, \lambda_0), S(x, \lambda_0)\right] = e(\lambda_0) = 0$$

olduğundan $\exists c \neq 0$ için

$$e(x, \lambda_0) = cS(x, \lambda_0)$$

olur. Buradan $c = e_x(0, \lambda_0)$ elde edilir.
Teorem 12.3 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}_+$, $e(\lambda_1) = e(\lambda_2) = 0$ ise

$$\lim_{x \to 0} W\left[e(x, \lambda_1), \overline{e(x, \lambda_2)}\right] = 0$$

gerçeklenir.
İspat.

$$\begin{aligned} e(x, \lambda_1) &= e_x(0, \lambda_1) S(x, \lambda_1) \\ e(x, \lambda_2) &= e_x(0, \lambda_2) S(x, \lambda_2) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} W\left[e(x, \lambda_1), \overline{e(x, \lambda_2)}\right] &= \lim_{x \to 0} e(x, \lambda_1)\overline{e'(x, \lambda_2)} - e'(x, \lambda_1)\overline{e(x, \lambda_2)} \\ &= e_x(0, \lambda_1)\overline{e_x(0, \lambda_2)} \lim_{x \to 0} \left[S(x, \lambda_1)\overline{S'(0, \lambda_2)} - S'(x, \lambda_1)\overline{S(x, \lambda_2)}\right] = 0 \end{aligned}$$

bulunur.
Teorem 12.4 Jost fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ daki tüm sıfırları imajiner eksen üzerindedir.
İspat. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}_+$ ve $e(\lambda_1) = e(\lambda_2) = 0$ olsun.

$$\begin{cases} -e''(x, \lambda_1) + q(x) e(x, \lambda_1) = \lambda_1^2 e(x, \lambda_1) \\ -\overline{e''(x, \lambda_2)} + q(x)\overline{e(x, \lambda_2)} = \overline{\lambda_2^2 e(x, \lambda_2)} \end{cases}$$

olup son iki eşitlikten

$$e(x,\lambda_1)\overline{e''(x,\lambda_2)} - e''(x,\lambda_1)\overline{e(x,\lambda_2)} = (\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2^2})e(x,\lambda_1)\overline{e(x,\lambda_2)}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{W\left[e(x,\lambda_1),\overline{e(x,\lambda_2)}\right] = (\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2^2})e(x,\lambda_1)\overline{e(x,\lambda_2)}\right\}$$

$$W\left[e(x,\lambda_1),\overline{e(x,\lambda_2)}\right]|_0^\infty = (\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2^2})\int\limits_0^\infty e(x,\lambda_1)\overline{e(x,\lambda_2)}dx.$$

Sonuncu eşitlikten

$$(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2^2})\int\limits_0^\infty e(x,\lambda_1)\overline{e(x,\lambda_2)}dx = 0 \qquad (12.1)$$

elde edilir. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ olmak üzere (12.1) den

$$(\lambda_0^2 - \overline{\lambda_0^2})\int\limits_0^\infty |e(x,\lambda_0)|^2\,dx = 0$$

çıkar. Sonuncu eşitlikten ise $\lambda_0 = ia_0$, $a_0 > 0$ bulunur.

Alıştırmalar.

1) Jost fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ daki tüm sıfırlarının basit olduğunu ispatlayınız.
2)

$$\begin{cases} -y'' = \lambda^2 y, \quad x \in [0,1)\cup(1,\infty) \\ y(0) = 0 \\ y(1^+) = \gamma_1 y(1^-) \\ y'(1^+) = \gamma_2 y'(1^-),\ \gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{R},\ \gamma_1\gamma_2 \neq 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin
a) Jost fonksiyonunu bulunuz.
b) Jost fonksiyonunun sıfırlarını inceleyiniz.