

KONU 6. JOST ÇÖZÜMÜNÜN x DEĞİŞKENİNE GÖRE ASİMPTOTİĞİ

Teorem 6.1. (5.6) ile tanımlanan $E^+(x, \lambda)$ fonksiyonu için

$$E^+(x, \lambda) = \begin{pmatrix} E_1^+(x, \lambda) \\ E_2^+(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gerçekleşir.

İspat. (5.6) eşitliğinden

$$E_1^+(x, \lambda) = \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

olduğu biliniyor. Buradan

$$\left| \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds \right| \leq \int_x^\infty |H_{12}(x, s)| ds, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

çıkar. Sonuncu eşitsizlikten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds = 0, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

veya

$$\int_x^\infty H_{12}(x, s) e^{i\lambda s} ds = o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \infty \quad (6.1)$$

bulunur. Benzer biçimde (5.6) eşitliğinden

$$E_2^+(x, \lambda) - e^{i\lambda x} = \int_x^\infty H_{22}(x, s) e^{i\lambda s} ds, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

çıkar. Sonuncu eşitlikten ise

$$E_2^+(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \infty \quad (6.2)$$

bulunur. (6.1) ve (6.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} E^+(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} E_1^+(x, \lambda) \\ E_2^+(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o(1) \\ e^{i\lambda x} + o(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(1) \\ o(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma.

1.

$$E^-(x, \lambda) = \begin{pmatrix} E_1^-(x, \lambda) \\ E_2^-(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\lambda x} + \int_x^\infty H_{11}(x, s)e^{-i\lambda s} ds \\ \int_x^\infty H_{21}(x, s)e^{-i\lambda s} ds \end{pmatrix}, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$$

formülünü kullanarak

$$E^-(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + o(1), \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-, x \rightarrow \infty$$

asimptotik eşitliğini ispatlayınız.