

**KONU 9. TÜM REEL EKSENDE STURM-LIOUVILLE
DENKLEMİNİN JOST ÇÖZÜMLERİ**

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad -\infty < x < \infty \quad (9.1)$$

denklemini göz önünde bulunduralım, burada $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, λ spektral parametre ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) |q(x)| dx < \infty \quad (9.2)$$

gerçeklenir. (9.1) denkleminin

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x, \lambda) e^{-i\lambda x} = 1, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda \geq 0\}$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x, \lambda) e^{i\lambda x} = 1, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

koşullarını gerçekleyen çözümlerini sırası ile $f(x, \lambda)$ ve $g(x, \lambda)$ ile gösterelim. Yarım eksendeki Sturm-Liouville denkleminin $e(x, \lambda)$ çözümüne benzer olarak $f(x, \lambda)$ ve $g(x, \lambda)$ çözümleri vardır, tektir ve λ ya göre $\mathbb{C}_+ = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda > 0\}$ bölgesinde analitik, reel ekseninde ise süreklidir. $e(x, \lambda)$ çözümüne benzer olarak

$$f(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} A^+(x, t) e^{i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad (9.3)$$

$$g(x, \lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^x A^-(x, t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ \quad (9.4)$$

eşitlikleri gerçeklenir. Ayrıca A^+ ve A^- fonksiyonlarımızın birinci mertebeden sürekli kısmi türevleri mevcut ve

$$|A^+(x, t)| \leq c\sigma^+\left(\frac{x+t}{2}\right), \quad (9.5)$$

$$|A^-(x, t)| \leq c\sigma^-\left(\frac{x+t}{2}\right), \quad (9.6)$$

$$|A_x^+(x, t)|, |A_t^+(x, t)| \leq \frac{1}{4} \left| q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right| + c\sigma^+\left(\frac{x+t}{2}\right), \quad (9.7)$$

$$|A_x^-(x, t)|, |A_t^-(x, t)| \leq \frac{1}{4} \left| q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right| + c\sigma^-\left(\frac{x+t}{2}\right) \quad (9.8)$$

eşitsizlikleri gerçeklenir, burada

$$\sigma^+(x) = \int_x^{\infty} |q(s)| ds, \quad \sigma^-(x) = \int_{-\infty}^x |q(s)| ds \quad (9.9)$$

gibi tanımlanır. (9.3) ve (9.4) ile tanımlanan $f(x, \lambda)$ ve $g(x, \lambda)$ fonksiyonlarına (9.1) denkleminin Jost çözümleri denir.

Alıştırmalar.

1) (9.5) – (9.8) eşitsizliklerini kullanarak

$$A^+(x, \cdot), A_x^+(x, \cdot), A_t^+(x, \cdot) \in L_1(0, \infty)$$

ve

$$A^-(x, \cdot), A_x^-(x, \cdot), A_t^-(x, \cdot) \in L_1(-\infty, 0)$$

olduğunu ispatlayınız.

2) (9.9) eşitliklerindeki genelleştirilmiş integrallerin yakınsak olduğunu gösteriniz.

3)

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y &= \lambda^2 y, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\ y(0^+) &= \gamma_1 y(0^-) \\ y'(0^+) &= \gamma_2 y'(0^-), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, \quad \gamma_1 \gamma_2 \neq 0 \end{aligned}$$

impulsive probleminin Jost çözümlerini bulunuz.