KONU 11. JOST ÇÖZÜMLERİNİN SPEKTRAL PARAMETREYE GÖRE ASİMPTOTİĞİ

Teorem 11.1 $f(x,\lambda)$ ve $g(x,\lambda)$ fonksiyonları λ parametresine göre aşağıdaki asimptotik eşitlikleri gerçekler:

1) $f(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left[1 + o(1)\right],\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \to \infty,$

2) $f_x(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left[i\lambda + O(1)\right],\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \to \infty,$

3) $g(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}\left[1 + o(1)\right],\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \to \infty,$

4) $g_x(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}\left[-i\lambda + O(1)\right],\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+,\ |\lambda| \to \infty.$

İspat. 2. ve 3. asimptotik eşitlikleri gösterelim.

2) a) $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. (10.1) eşitliğine göre

$$f_x(x,\lambda)e^{-i\lambda x} - i\lambda = -A^+(x,x) + e^{-i\lambda x}\int_x^\infty A_x^+(x,t)e^{i\lambda t}dt \tag{11.1}$$

sağlanır.

$$A^+(x,x) = O(1),\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \to \pm\infty \tag{11.2}$$

olduğu açıktır. Fourier dönüşümleri için Riemann-Lebesgue lemmasına göre

$$\int_x^\infty A_x^+(x,t)e^{i\lambda t}dt = o(1),\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \to \pm\infty \tag{11.3}$$

bulunur. $(11.1) - (11.3)$ eşitliklerinden ise

$$f_x(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left[i\lambda + O(1)\right],\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \to \pm\infty \tag{11.4}$$

elde edilir.

b) $\lambda \in \mathbb{C}_+$ olsun.

$$A^+(x,x) = O(1),\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{C}_+,\ |\lambda| \to \infty \tag{11.5}$$

olduğu kolaylıkla gözükür.

$$I = \int_x^\infty A_x^+(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt,\ \lambda \in \mathbb{C}_+$$

parametreye bağlı genelleştirilmiş integrali $\lambda \in \mathbb{C}_+$ için düzgün yakınsak olduğundan

$$\int_x^\infty A_x^+(x,t)e^{i\lambda(t-x)}dt = o(1),\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{C}_+,\ |\lambda| \to \infty \tag{11.6}$$

bulunur. (11.5) ve (11.6) asimptotik eşitliklerini (11.1) eşitliğinde dikkate alarak

$$f_x(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left[i\lambda + O(1)\right],\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{C}_+, |\lambda| \to \infty \tag{11.7}$$

eşitliğini elde ederiz. (11.4) ve (11.7) eşitliklerinden ise 2. eşitlik elde edilir.

3) (9.4) eşitliğinden

$$g(x,\lambda)e^{i\lambda x}-1=\int\limits_{-\infty}^{x}A^{-}(x,t)e^{i\lambda(x-t)}dt,\ x\in\mathbb{R},\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{+}$$

bulunur. 2. eşitliğin ispatına benzer biçimde sonuncu eşitlikten

$$g(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}\left[1+o(1)\right],\ x\in\mathbb{R},\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{+},\ \ |\lambda|\to\infty$$

eşitliği elde edilir.

Alıştırmalar.

1) Teorem 11.1 deki 1. ve 4. eşitlikleri gösteriniz.

2) a) $f(x,\lambda)=e^{i\lambda x}\left[1+O(\frac{1}{\lambda})\right]$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{+}$, $|\lambda|\to\infty$,
b) $g(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}\left[1+O(\frac{1}{\lambda})\right]$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{+}$, $|\lambda|\to\infty$
asimptotik eşitliklerini ispatlayınız.

3) Aşağıdaki asimptotik eşitlikleri elde ediniz:
a) $f(x,-\lambda)=e^{-i\lambda x}\left[1+o(1)\right]$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{-}$, $|\lambda|\to\infty$,
b) $f_x(x,-\lambda)=e^{-i\lambda x}\left[-i\lambda+O(1)\right]$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{-}$, $|\lambda|\to\infty$,
c) $g(x,-\lambda)=e^{i\lambda x}\left[1+o(1)\right]$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{-}$, $|\lambda|\to\infty$,
d) $g_x(x,-\lambda)=e^{i\lambda x}\left[i\lambda+O(1)\right]$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{-}$, $|\lambda|\to\infty$.

4) Yukarıdaki 3. örnekteki a) ve c) eşitliklerinin bir iyileşmesi olan
a) $f(x,-\lambda)=e^{-i\lambda x}\left[1+O(\frac{1}{\lambda})\right]$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{-}$, $|\lambda|\to\infty$
b) $g(x,-\lambda)=e^{i\lambda x}\left[1+O(\frac{1}{\lambda})\right]$, $x\in\mathbb{R}$, $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{-}$, $|\lambda|\to\infty$
eşitliklerini ispatlayınız.