MAT 109 ANALİZ I

Analize Giriş

Ankara Üniversitesi

1. Hafta

Matematikte kullanılan küme kavramı, bazı özelliklere sahip nesnelerin bir topluluğu veya bir sınıfı gibi düşünülebilir. Kümeyi teşkil eden nesnelere kümenin elemanları veya öğeleri denir. Kümeler

$$A,\ B,\ C,\ X,\ Y, \ldots$$

gibi büyük harflerle, kümenin elemanları da

$$a,\ b,\ c,\ x,\ y, \ldots$$

gibi küçük harflerle gösterilecektir.

a bir A kümesinin elemanı ise $a \in A$ biçiminde,

a bir B kümesinin elemanı değil ise $a \notin B$ biçiminde

gösterilecektir.

Bir kümenin verilmesi için, o kümenin elemanlarının teker teker belirtilmesi veya o kümenin elemanlarının belirtilmesine yarayan bir özelliğin verilmesi gerekir. Yani, bir elemanın kümeye ait olup olmadığını belirtmeye yarayan kesin bir kuralın verilmesi gerekmektedir.
Buna göre bir kümeyi gösterirken ya o kümenin elemanları

$$\{...\}$$

sembolünde noktalı olan yerlere yazılır ya da

$$\{x : x \text{ elemanının karakteristik özelliği}\}$$

sembolü kullanılır, burada x kümenin genel elemanını, : işareti de "öyle ki" anlamına gelen bir simge olarak kullanılmıştır.

Örneğin;

$$A = \{-1, 3, 5, 6\}$$

ifadesi -1, 3, 5 ve 6 sayılarını içeren kümeyi belirtmektedir.

$$B = \{x : 1 < x < 5\}$$

ifadesi ile tanımlı B kümesi, 1 sayısı ile 5 sayısı arasındaki tüm reel sayıların kümesini göstermektedir.

$$3.75 \in B$$

olup

$$5 \notin B$$

dir.

Hiç bir elemanı olmayan kümeye boş küme adı verilir ve

$$\emptyset$$

ile gösterilir.

Tanım 1.1.1.

A kümesinin herbir elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B kümesinin alt kümesidir denir.

$$A \subset B$$

sembolü ile gösterilir. Yukardaki tanımı simgesel mantık dilinde aşağıdaki gibi

$$A \subset B \iff (\forall a \in A \implies a \in B)$$

yazabiliriz.

Tanım 1.1.2.

Eğer $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise A ve B kümeleri eşittir denir ve

$$A = B$$

biçiminde gösterilir. Buna göre

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

dır.

Tanım 1.1.3.

A ve B herhangi iki küme olsun. A ve B kümelerinin birleşimi, kesişimi (arakesiti), farkı ve simetrik farkı sırasıyla aşağıdaki şekilde

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\} \\
A \cap B &= \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\} \\
A \backslash B &= \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\} \\
A \Delta B &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A)
\end{aligned}
$$

tanımlanır.

Bundan sonra göz önüne alacağımız kümeler, bilindiği kabul edilen bir $\mathbb{E}$ evrensel kümesinin birer alt kümeleri olarak düşünülecektir.

Tanım 1.1.4.

$A \subset \mathbb{E}$ olmak üzere

$$\mathbb{E} \backslash A$$

kümesine A kümesinin tümleyeni denir ve

$$A^c$$

ile gösterilir. Buna göre

$$A^c = \{x \in \mathbb{E} : x \notin A\}$$

dır.

Teorem 1.1.5.

A, B ve C kümeleri $\mathbb{E}$ evrensel kümesinin herhangi alt kümeleri olsun. Bu durumda birleşim, kesişim ve tümleyen işleminin aşağıdaki özellikleri vardır:

(a)	$A \cup B \subset \mathbb{E}$ ve $B \cup A \subset \mathbb{E}$	(Kapalılık Özelliği)
(b)	$A \cup B = B \cup A$ ve $A \cap B = B \cap A$	(Değişme Özelliği)
(c)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	(Birleşme Özelliği)
(d)	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(Birleşme Özelliği)
(e)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(Dağılma Özelliği)
(f)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(Dağılma Özelliği)

(g) $A \cup A = A \cap A = A$
(h) $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$
$(\imath)$ $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \mathbb{E} = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ ve $A \cup \mathbb{E} = \mathbb{E}$
(i) $A \cup A^c = \mathbb{E}$ ve $A \cap A^c = \emptyset$
(j) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (De Morgan Kuralı)
(k) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (De Morgan Kuralı)

Tanım 1.1.6.

A ve B kümeleri için

$$A \cap B = \emptyset$$

ise A ve B kümelerine ayrık küme adı verilir.

Tanım 1.1.7.

A ve B küme olsun.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

kümesine A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

(a,b) ve (c,d) sıralı ikililerin eşitliği

$$(a,b) = (c,d) \iff a = c \text{ ve } b = d$$

biçiminde tanımlanır. Dolayısıyla, $(a,b) \neq (b,a)$ olabileceğinden genel olarak

$$A \times B \neq B \times A$$

dır.

Tanım 1.2.1.

X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $X \times Y$ kümesinin boş olmayan her $\mathcal{R}$ alt kümesine X kümesinden Y kümesine bağıntı adı verilir.

Not 1.2.2.

X kümesinden Y kümesine bağıntı verildiğinde

$$\{(b,a) : (a,b) \in \mathcal{R}\}$$

kümesi Y kümesinden X kümesine bağıntıdır. Bu bağıntıya $\mathcal{R}$ bağıntısının tersi denir ve

$$\mathcal{R}^{-1}$$

ile gösterilir.

Tanım 1.2.3.

$\mathcal{R} \subset X \times X$ bağıntı olsun.
(a) Her $a \in X$ için

$$a\mathcal{R}a$$

ise $\mathcal{R}$ bağıntısına yansıyan,
(b) $a, b \in X$ için

$$a\mathcal{R}b \Longrightarrow b\mathcal{R}a$$

olması durumunda $\mathcal{R}$ bağıntısına simetrik,
(c) $a, b \in X$ için

$$(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a) \Longrightarrow a = b$$

olması durumunda $\mathcal{R}$ bağıntısına ters simetrik,
(d) $a, b, c \in X$ için

$$(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Longrightarrow a\mathcal{R}c$$

olması durumunda $\mathcal{R}$ bağıntısına geçişken bağıntı adı verilir.

Tanım 1.2.4.

Yansıyan, simetrik ve geçişken bağıntıya denklik bağıntısı adı verilir.

Not 1.2.5.

$\mathcal{R}$ bağıntısı denklik bağıntısı olduğunda

$$a\mathcal{R}b$$

yerine

$$a \sim b$$

kullanılır ve "a denktir b" diye okunur.

Tanım 1.2.6.

Yansıyan, ters simetrik ve geçişken bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı adı verilir.

Not 1.2.7.

$\mathcal{R}$ bağıntısı kısmi sıralama bağıntısı olduğunda

$$a\mathcal{R}b$$

yerine

$$a \preceq b$$

kullanılır ve "a önce gelir b" diye okunur.

Tanım 1.2.8.

X üzerindeki $\mathcal{R}$ bağıntısı kısmi sıralama bağıntısı olsun. Eğer her $a, b \in X$ için

$$a\mathcal{R}b \quad \text{veya} \quad b\mathcal{R}a$$

ise $\mathcal{R}$ bağıntısına tam sıralama bağıntısı denir.

Not 1.2.9.

$\mathcal{R}$ bağıntısı tam sıralama bağıntısı olduğunda

$$a\mathcal{R}b$$

yerine

$$a \leq b$$

kullanılır ve "a küçük eşit b" diye okunur.

Tanım 1.2.10.

$X \neq \emptyset$ olmak üzere X üzerindeki denklik bağıntısı $\sim$ olsun. $a \in X$ için

$$\bar{a} = \{x \in X : x \sim a\}$$

kümesine a elemanının denklik sınıfı adı verilir.

Şimdi matematiğin temel kavramlarından biri olan ve fonksiyon adı verilen özel bağıntılar tanımlanacaktır.

Tanım 1.2.11.

$X, Y \neq \emptyset$ iki küme ve

$$f = \{(x,y) : x \in X \text{ ve } y \in Y\} \subset X \times Y$$

bağıntı olsun. Eğer

(i) Her bir $x \in X$ elemanı için en az bir $y \in Y$ elemanı var öyle ki $(x,y) \in f$

(ii) $(x,y_1) \in f$ ve $(x,y_2) \in f$ ise $y_1 = y_2$

koşulları sağlanıyorsa f bağıntısına X kümesinden Y kümesine fonksiyon adı verilir ve

$$f : X \to Y$$

sembolü ile gösterilir. X kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, Y kümesine de f fonksiyonunun görüntü kümesi adı verilir.

Not 1.2.12.

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu için f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathcal{D}(f)$, f fonksiyonunun değer kümesi olarak adlandırılan

$$\{f(x) : x \in \mathcal{D}(f)\}$$

kümesi de $\mathcal{R}(f)$ ile gösterilecektir. Buna göre

$$\mathcal{D}(f) \neq X \quad \text{veya} \quad \mathcal{R}(f) \neq Y$$

olabilir.

Not 1.2.13.

$f : X \to Y$ fonksiyonu verildiğinde $x \in \mathcal{D}(f)$ elemanına karşılık gelen $y \in \mathcal{R}(f)$ elemanı

$$y = f(x)$$

ile gösterilir ve bu y elemanına x elemanının f fonksiyonu altında görüntüsü adı verilir.

Tanım 1.2.14.

$f : X \to Y$ fonksiyon olsun.
(i) $A \subset \mathcal{D}(f)$ olmak üzere

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

kümesine A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü adı verilir.
(ii) $B \subset \mathcal{R}(f)$ olmak üzere

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathcal{D}(f) : f(x) \in B\}$$

kümesine B kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü (ön görüntüsü) adı verilir.

Tanım 1.2.15.

$f, g : X \to Y$ fonksiyonları verilsin. Eğer

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g)$$

ve her $x \in \mathcal{D}$ için

$$f(x) = g(x)$$

ise f ve g fonksiyonları eşittir denir ve $f = g$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.16.

$X, Y \neq \emptyset$ kümeleri verilsin.
(i) $b \in Y$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$f(x) = b$$

ise f fonksiyonuna X kümesinden Y kümesine b değerli sabit fonksiyon adı verilir.
(ii) $X = Y$ ve her $x \in X$ için

$$f(x) = x$$

ise f fonksiyonuna birim fonksiyon adı verilir ve I_X ile gösterilir.

Tanım 1.2.17.

$f : X \to Y$ fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. Her $x \in A$ için

$$g(x) = f(x)$$

ile tanımlı

$$g : A \to Y$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun A kümesine kısıtlaması denir ve

$$f|_A$$

ile gösterilir.

Tanım 1.2.18.

$f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin.
(i) Her $y \in Y$ elemanı için $y = f(x)$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ elemanı mevcut $(f(X) = Y)$ ise f fonksiyonuna örten (surjektif) fonksiyon denir.
(ii) $f(x_1) = f(x_2)$ olacak şekilde her $x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 = x_2$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna birebir (injektif) fonksiyon denir.
(iii) Birebir ve örten fonksiyona bijektif fonksiyon adı verilir.

Tanım 1.2.19.

$$f : X \to Y \quad \text{ve} \quad g : Y \to Z$$

fonksiyonları verilsin. Her $x \in X$ için

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ile tanımlı

$$g \circ f : X \to Z$$

fonksiyonuna f ile g fonksiyonunun bileşke fonksiyonu adı verilir.

Not 1.2.20.

Genel olarak

$$f \circ g \neq g \circ f$$

dir. Örneğin; $f(x) = x^2$ ve $g(x) = 2^x$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2^x) = 2^{2x} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = 2^{x^2} \end{aligned}$$

olduğuna göre $f \circ g \neq g \circ f$ dir.

Tanım 1.2.21.

$f : X \to Y$ fonksiyonu için

$$f \circ \tilde{f} = I_Y \qquad \text{ve} \qquad \tilde{f} \circ f = I_X$$

olacak şekilde

$$\tilde{f} : Y \to X$$

fonksiyonu mevcut ise $\tilde{f}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tersi denir ve

$$f^{-1}$$

ile gösterilir.

Teorem 1.2.22.

$f : X \to Y$ fonksiyonunun tersinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun birebir örten (bijektif) olmasıdır.

Tanım 1.2.23.

X ve Y kümeleri arasında birebir örten fonksiyon varsa X ve Y kümelerine denk (eş güçlü) kümeler adı verilir ve

$$X \sim Y$$

biçiminde gösterilir.

Not 1.2.24.

$X \sim Y$ şeklinde tanımlı bağıntı denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.2.25.

$A \subset \mathbb{E}$ için

$$\bar{A} = \{B \subset \mathbb{E} : A \sim B\}$$

kümesi A kümesinin denklik sınıfı olmak üzere $\bar{A}$ sınıfına A kümesinin gücü denir.

Tanım 1.2.26.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$$

kümesi ile denk olan kümeye sonlu küme,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$$

doğal sayılar kümesi ile denk olan kümeye de sayılabilir küme adı verilir.

Örnek 1.2.27.

$$\mathbb{N}_{\c{C}} = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$$

çift doğal sayılar kümesi sayılabilirdir. Gösteriniz.

Teorem 1.2.28.

$A, B \subset X$ olmak üzere

$$f : X \to Y$$

fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i)

$$A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$$

(ii)

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

(iii)

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

(iv)

$$f(A \backslash B) \subset f(A)$$

Teorem 1.2.29.

$E, F \subset Y$ olmak üzere

$$f : X \to Y$$

fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i)

$$E \subset F \Longrightarrow f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$$

(ii)

$$f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$$

(iii)

$$f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$$

(iv)

$$f^{-1}(E \backslash F) = f^{-1}(E) \backslash f^{-1}(F)$$

(v)

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$