MAT 109 ANALİZ I

Analize Giriş

Ankara Üniversitesi

3. Hafta

Bu kısımda reel değişkenli ve reel değerli (yani; $X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$) en çok kullanılan fonksiyonlar tanımlanacak ve bu fonksiyonların özellikleri incelenecektir.

Tanım 1.5.1.

$X \subset \mathbb{R}$ ve $Y \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f, g : X \to Y$$

fonksiyonları verilisin. Bu iki fonksiyonun $f+g$ toplamı, $f-g$ farkı, $f.g$ çarpımı ve $\frac{f}{g}$ bölümü sırasıyla

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x) \\ (f.g)(x) &= f(x).g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Not 1.5.2.

$f+g$ toplamı, $f-g$ farkı, $f.g$ çarpımı f ve g fonksiyonlarının tanımlı olduğu her noktada; $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $g(x)=0$ denklemini sağlayan x noktaları hariç diğer tüm noktalarda tanımlıdır.
Örneğin; $f(x)=\sqrt{x-1}$ ve $g(x)=\sqrt{5-x}$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(f) &= [1,+\infty) \\
\mathcal{D}(g) &= (-\infty,5] \\
\mathcal{D}(f+g) &= \mathcal{D}(f-g)=\mathcal{D}(f.g)=[1,5] \\
\mathcal{D}\left(\frac{f}{g}\right) &= [1,5)
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 1.5.3.

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu verilsin. Her $x \in X$ için

$$x + T \in X \text{ ve } f(x+T) = f(x)$$

olacak şekilde $T > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T sayısına da f fonksiyonunun bir periyodu denir. Eğer bu periyotların en küçüğü varsa bu sayıya f fonksiyonunun esas periyodu denir.

Tanım 1.5.4.

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu verilsin.
(i) Her $x_1, x_2 \in X$ öyle ki $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonuna X üzerinde artan,
(ii) Her $x_1, x_2 \in X$ öyle ki $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna X üzerinde azalmayan,
(iii) Her $x_1, x_2 \in X$ öyle ki $x_1 < x_2$ için $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonuna X üzerinde azalan,
(iv) Her $x_1, x_2 \in X$ öyle ki $x_1 < x_2$ için $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonuna X üzerinde artmayan
fonksiyon denir.

Not 1.5.5.

Yukarda listelenen tipte fonksiyonlara X üzerinde monoton fonksiyon adı verilir.

Tanım 1.5.6.

$X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere her $x \in X$ için $-x \in X$ oluyorsa X kümesine simetrik küme adı verilir.

Tanım 1.5.7.

$X \subset \mathbb{R}$ simetrik küme ve

$$f : X \to Y$$

fonksiyon olsun.
(i) Her $x \in X$ için $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna çift fonksiyon,
(ii) Her $x \in X$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonuna tek fonksiyon
adı verilir.

Tanım 1.5.8.

$X \subset \mathbb{R}$ ve

$$f : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyon olsun.
(i) Her $x \in X$ için

$$f(x) \leq M$$

olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna X üzerinde üstten sınırlı fonksiyon denir.
(ii) Her $x \in X$ için

$$m \leq f(x)$$

olacak şekilde $m \in \mathbb{R}$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna X üzerinde alttan sınırlı fonksiyon denir.

(iii) Her $x \in X$ için

$$m \leq f(x) \leq M$$

olacak şekilde $m, M \in \mathbb{R}$ sayıları mevcut ise f fonksiyonuna X üzerinde sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 1.5.9.

$X \subset \mathbb{R}$ ve

$$f : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyon olsun. $x \in X$ için koordinat düzleminin $(x, f(x))$ noktalar kümesine $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği denir.

Tanım 1.5.10.

$y = c$ sabit, $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ kuvvet, $y = a^{x}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ üstel, $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ logaritma, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ trigonometrik ve $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ ters trigonometrik fonksiyonlara temel elemanter fonksiyon adı verilir.

Tanım 1.5.11.

Temel elemanter fonksiyonlardan sonlu sayıda aritmetik işlem ve bileşke fonksiyon oluşturma kuralları uygulanması ile elde edilip $y = f(x)$ eşitliği ile ifade edilebilen f fonksiyonuna elemanter fonksiyon adı verilir.

Şimdi temel ve bazı elemanter fonksiyonların özelliklerini ve grafiklerini inceleyelim.

1.5.1. Sabit Fonksiyon

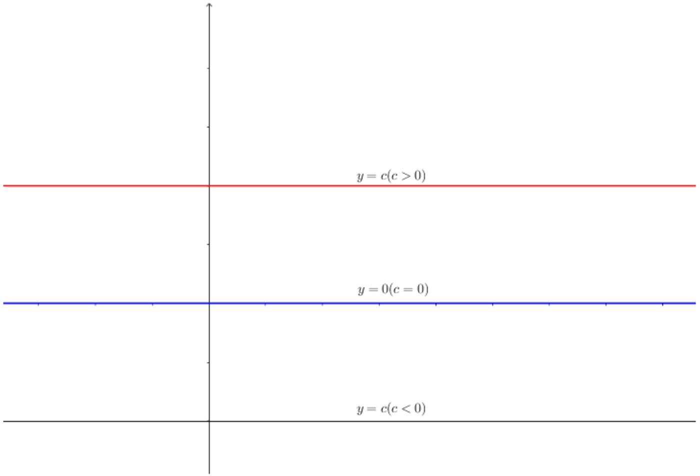
$c \in \mathbb{R}$ sabit sayı olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için

$$y = f(x) = c$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona sabit fonksiyon denir.

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \mathcal{R}(f) = \{c\}$$

dir. $c \in \mathbb{R}$ sabit sayısının durumlarına göre $y = f(x) = c$ sabit fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:


$y = c(c > 0)$
$y = 0(c = 0)$
$y = c(c < 0)$

1.5.2. Tam Rasyonel Fonksiyon

$a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

şeklindeki n -inci dereceden polinoma tam rasyonel fonksiyon denir.

1.5.3. Rasyonel (Kesirli Rasyonel) Fonksiyon

$P_n(x)$ ve $Q_m(x)$ iki polinom olmak üzere

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona rasyonel (kesirli rasyonel) fonksiyon adı verilir.

1.5.4. Kuvvet Fonksiyonu

$\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

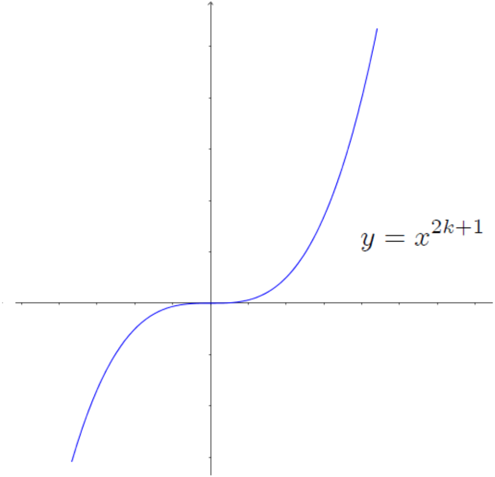
$$y = x^{\alpha}$$

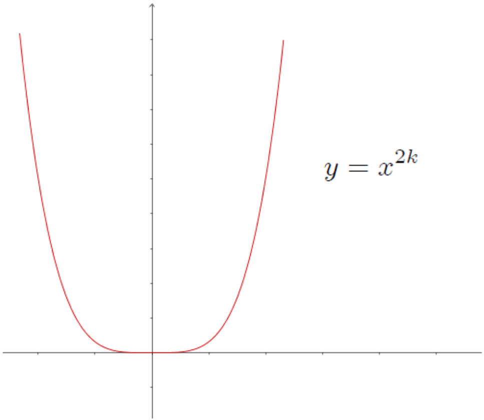
şeklinde tanımlanan fonksiyona kuvvet fonksiyonu adı verilir.
α sayısının rasyonel sayı olması durumunda bu fonksiyonun bazı özelliklerini araştıralım:

(i) $\alpha = n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$y = x^{n}$$

fonksiyonu n -inci dereceli polinomların özel halidir. n sayısının tek ve çift olması durumlarında $y = x^n$ fonksiyonunun grafikleri aşağıda verilmiştir:

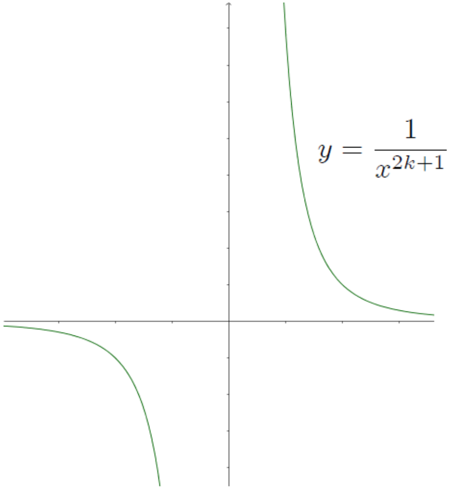

$y = x^{2k+1}$

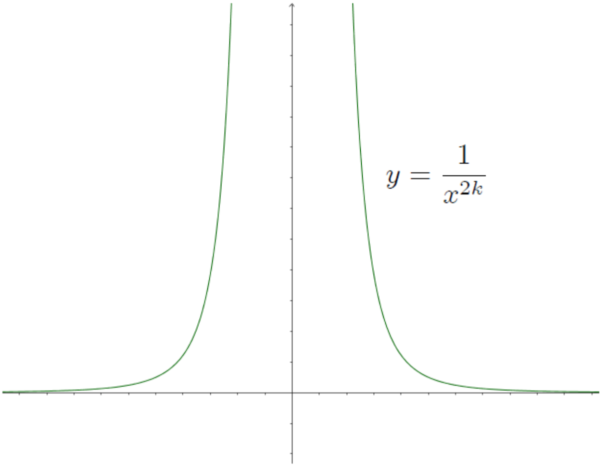

$y = x^{2k}$

(ii) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha = -n$ olsun. Bu durumda

$$y = \frac{1}{x^n}$$

fonksiyonu rasyonel fonksiyondur. n sayısının tek ve çift olması durumlarında $y = \frac{1}{x^n}$ fonksiyonunun grafikleri aşağıda verilmiştir:


$y = \dfrac{1}{x^{2k+1}}$


$y = \dfrac{1}{x^{2k}}$

(iii) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha = \frac{1}{n}$ olsun. Bu durumda

$$y = \sqrt[n]{x}$$

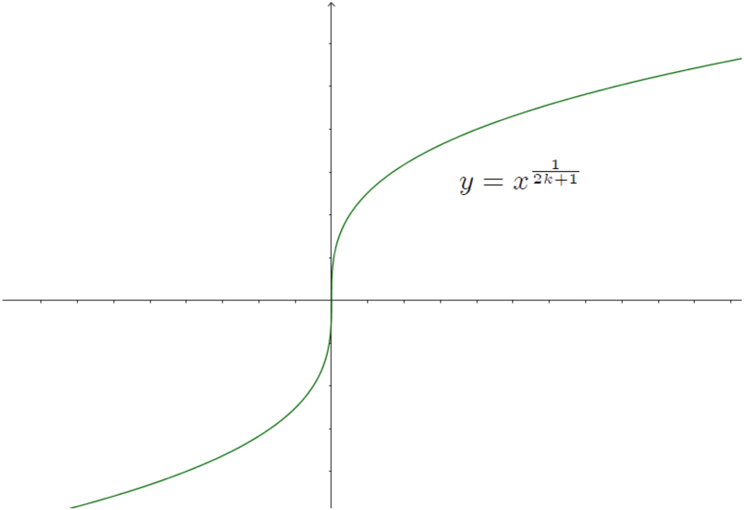
fonksiyonunun tanım kümesi

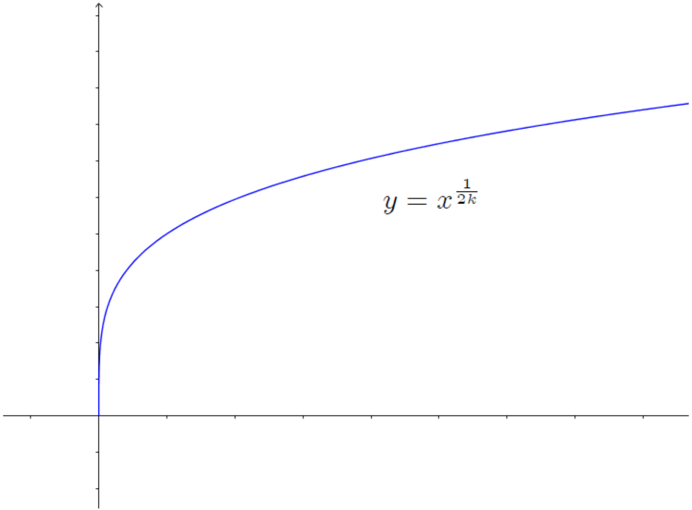
$$\mathcal{D}\left(\sqrt[n]{x}\right) = \begin{cases} \mathbb{R} & ; \quad n \text{ tek ise} \\ [0, +\infty) & ; \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir. Bu durumda

$$y = \sqrt[n]{x}$$

fonksiyonunun grafikleri n doğal sayısının tek ve çift olması durumlarında aşağıda verilmiştir:


$y = x^{\frac{1}{2k+1}}$


$y = x^{\frac{1}{2k}}$

(iv) $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ olsun. Bu durumda

$$y = x^{\frac{m}{n}}$$

fonksiyonu

$$y = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

ile tanımlıdır.

$$\mathcal{D}\left(\sqrt[n]{x^m}\right) = \begin{cases} \mathbb{R} & ; \quad n \text{ tek ise} \\ [0, +\infty) & ; \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

1.5.5. Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

Tanım 1.5.12.

$a > 0$ ve $a \neq 1$ herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna üstel fonksiyon adı verilir.

Not 1.5.13.

(i) $a > 1$ için

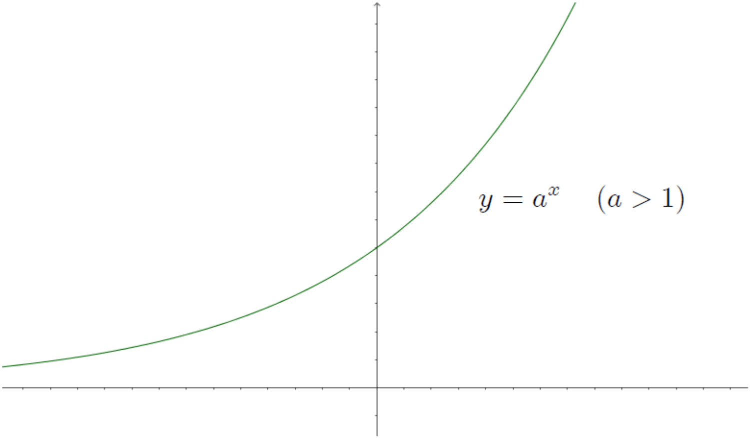
$$f(x) = a^x$$

fonksiyonu artandır. Dolayısıyla

$$x > 0 \Longrightarrow a^x > a^0 = 1 \Longrightarrow a^x > 1$$

$$x < 0 \Longrightarrow 0 < a^x < a^0 = 1 \Longrightarrow 0 < a^x < 1$$

dir.


$y = a^x \quad (a > 1)$

(ii) $0 < a < 1$ için

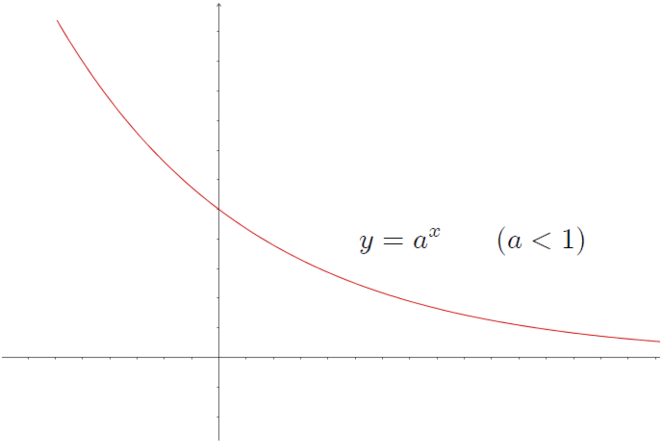
$$f(x) = a^x$$

fonksiyonu azalandır. Dolayısıyla

$$x > 0 \Longrightarrow a^x < a^0 = 1 \Longrightarrow 0 < a^x < 1$$

$$x < 0 \Longrightarrow a^x > a^0 \Longrightarrow a^x > 1$$

dir.


$y = a^x \qquad (a < 1)$

Not 1.5.14.

$a > 0$ ve $a \neq 1$ herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan foksiyonun aşağıdaki özellikleri vardır:
(i)

$$\mathcal{D}(a^x) = \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad R(a^x) = \mathbb{R}^+$$

dır.
(ii) Her $x, t \in \mathbb{R}$ ve $b > 0$ ve $b \neq 1$ olacak şekildeki herhangi bir reel sayısı için

$$(a^x)^t = a^{xt}$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

$$a^x a^t = a^{x+t}$$

dir.

Tanım 1.5.15.

$a > 0$, $a \neq 1$ ve $b > 0$ olmak üzere

$$a^{\alpha} = b$$

olacak şekilde α sayısına b sayısının a tabanına göre logaritması denir ve

$$\alpha = \log_a b$$

şeklinde yazılır.

Tanım 1.5.16.

$a > 0$, $a \neq 1$ olmak üzere

$$f(x) = \log_a x$$

şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna logaritmik fonksiyon adı verilir.

Not 1.5.17.

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \text{ için } x = \log_a y$$

ve

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ için } y = a^x$$

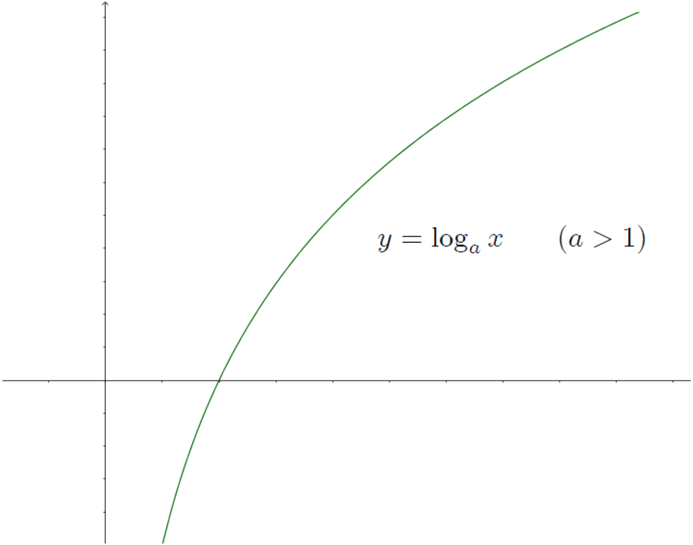
olarak tanımlanan fonksiyonları dikkate alalım.

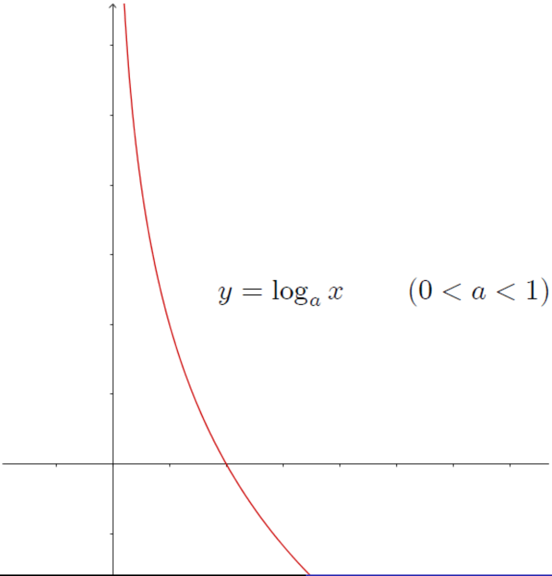
$$x = \log_a a^x \quad \text{ve} \quad y = a^{\log_a y}$$

olduğundan

$$y = a^x \quad \text{ve} \quad x = \log_a y$$

fonksiyonları karşılıklı olarak birbirlerinin ters fonksiyonlarıdır. Bu sebepten $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.


$y = \log_a x \qquad (a > 1)$


$y = \log_a x \qquad (0 < a < 1)$

Not 1.5.18.

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$$f(x) = \log_a x$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun aşağıdaki özellikleri vardır:
(i)

$$\mathcal{D}(\log_a x) = \mathbb{R}^+ \quad \text{ve} \quad \mathcal{R}(\log_a x) = \mathbb{R}$$

dir.

(ii) Her $x, t \in \mathbb{R}^+$ için

$$\log_a (xt) = \log_a x + \log_a t$$

ve

$$\log_a \left(\frac{x}{t}\right) = \log_a x - \log_a t$$

dir.
(iii) Her $x \in \mathbb{R}^+$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$

dir.

Not 1.5.19.

Pratikte en çok kullanılan logaritma doğal logaritma adı verilen e tabanına göre yazılan logaritmadır.

$$\log_e x \quad \text{ve} \quad \log_{10} x$$

yerine sırasıyla

$$\ln x \quad \text{ve} \quad \log x$$

yazılışları kullanılır. Buna göre

$$y = \ln x \iff e^y = x$$

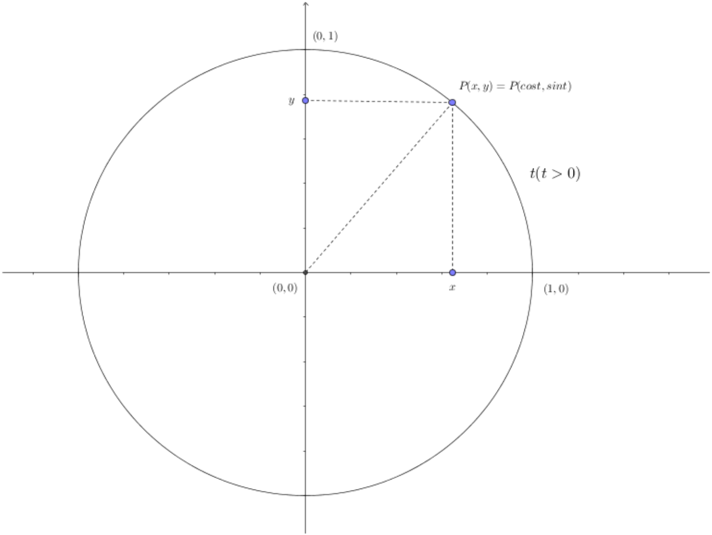
ve

$$y = \log x \iff 10^y = x$$

olur.

1.5.6. Trigonometrik Fonksiyonlar

Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çemberi dikkate alalım. $(1,0)$ noktasından başlayarak çember üzerinde $|t|$ birim ilerlensin ($t > 0$ ise saat yönünün tersine, $t < 0$ ise saat yönünde ilerlenecektir). Bu durumda çember üzerinde elde edilen P noktasının apsisi t sayısının kosinüsü $(\cos t)$, ordinati t sayısının sinüsü $(\sin t)$ olarak tanımlanır. Böylece her $t \in \mathbb{R}$ sayısına $\cos t$ ve $\sin t$ sayısı karşılık gelir.


(0, 1)
$P(x, y) = P(cost, sint)$
y
$t(t > 0)$
(0, 0)
x
(1, 0)

Şekilde görüldüğü gibi her $t \in \mathbb{R}$ ve her $k \in \mathbb{Z}$ için

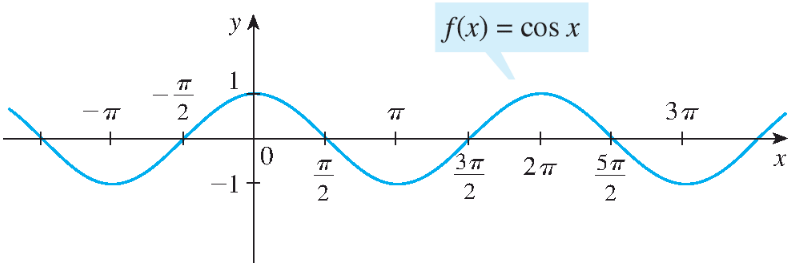
$$\begin{aligned}
\cos(-t) &= \cos t \\
\sin(-t) &= -\sin t \\
\cos(t + 2k\pi) &= \cos t \\
\sin(t + 2k\pi) &= \sin t
\end{aligned}$$

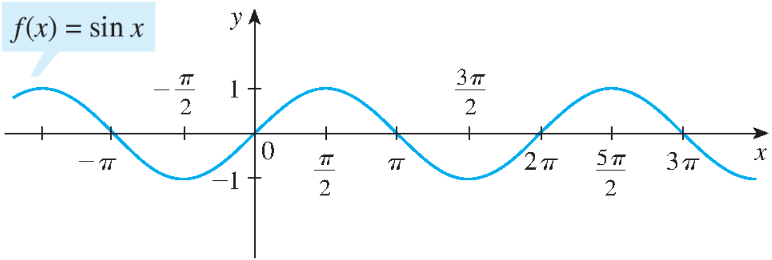
dir. Tanjant ve kotanjant fonksiyonları

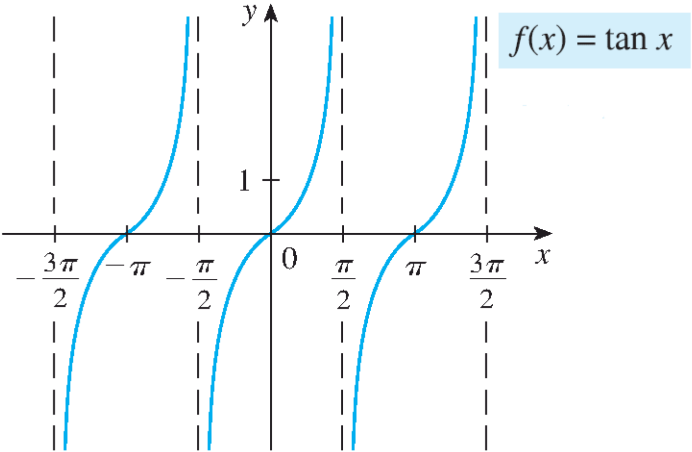
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{ve} \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

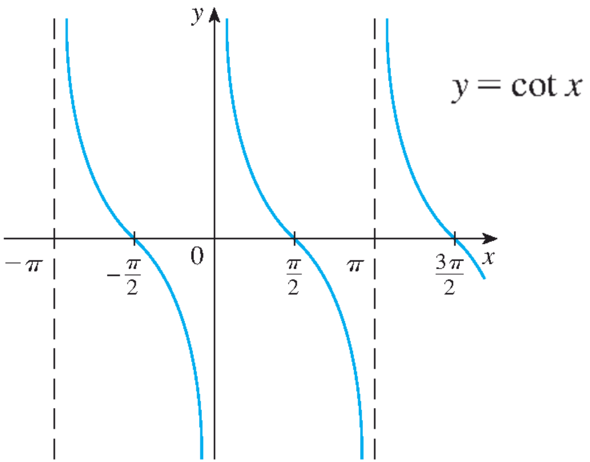
şeklinde tanımlanır.

Esas trigonometrik fonksiyonlar adı verilen kosinüs, sinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.


$f(x) = \cos x$
y
x
1
−1
0
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π


$f(x) = \sin x$
y
1
−1
0
x
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
3π


$f(x) = \tan x$
y
x
1
0
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$


y
$y = \cot x$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
x

Not 1.5.20.

Trigonometrik fonksiyonların aşağıdaki özellikleri vardır:
(i)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\cos t) &= \mathcal{D}(\sin t) = \mathbb{R}\\ \mathcal{R}(\cos t) &= \mathcal{R}(\sin t) = [-1,1]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\tan t) &= \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\\ \mathcal{D}(\cot t) &= \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\\ \mathcal{R}(\tan t) &= \mathcal{R}(\cot t) = \mathbb{R}\end{aligned}$$

oldukları görülebilir.
(ii)

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

dir.

(iii)

$$\sin 2t = 2\sin t \cos t$$

ve

$$\begin{aligned} \cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= 2\cos^2 t - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 t \end{aligned}$$

dir.

(iv)

$$\begin{aligned} \cos(t+u) &= \cos t \cos u - \sin t \sin u \\ \sin(t+u) &= \sin t \cos u + \sin u \cos t \end{aligned}$$

ve

$$\tan(t+u) = \frac{\tan t + \tan u}{1 - \tan t \tan u}$$

dur.

(v)

$$\begin{aligned}
\cos t \cos u &= \frac{1}{2}\{\cos(t+u) + \cos(t-u)\} \\
\sin t \sin u &= \frac{1}{2}\{\cos(t-u) - \cos(t+u)\} \\
\sin t \cos u &= \frac{1}{2}\{\sin(t+u) + \sin(t-u)\}
\end{aligned}$$

dur.

(vi) Sinüs ve kosinüs fonksiyonları 2π; tanjant ve kotanjant fonksiyonları π periyotludur.

1.5.7. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

(i)

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

olmak üzere

$$f(x) = \cos x$$

fonksiyonu örten fakat birebir olmadığından $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}$ üzerinde ters fonksiyonu yoktur.

Bu fonksiyonun $[0, \pi]$ aralığına kısıtlaması olan

$$\cos|_{[0,\pi]} = g : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

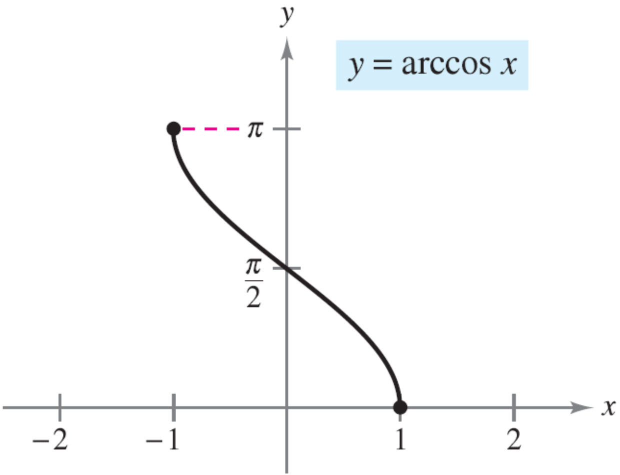
fonksiyonu birebir örten fonksiyon olduğundan

$$g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona arkkosinüs $(\arccos)$ fonksiyonu adı verilir. Buna göre

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \;\; \text{ve} \;\; y \in [0, \pi]$$

dir.


y
$y = \arccos x$
π
$\frac{\pi}{2}$
-2
-1
1
2
x

Benzer şekilde arksinüs, arktanjant, arkkotanjant fonksiyonları da aşağıdaki gibi tanımlanır.

(ii)

$$f:\mathbb{R}\to[-1,1]$$

olmak üzere

$$f(x)=\sin x$$

fonksiyonu örten fakat birebir olmadığından $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}$ üzerinde ters fonksiyonu yoktur.

Bu fonksiyonun $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığına kısıtlaması olan

$$\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} = g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

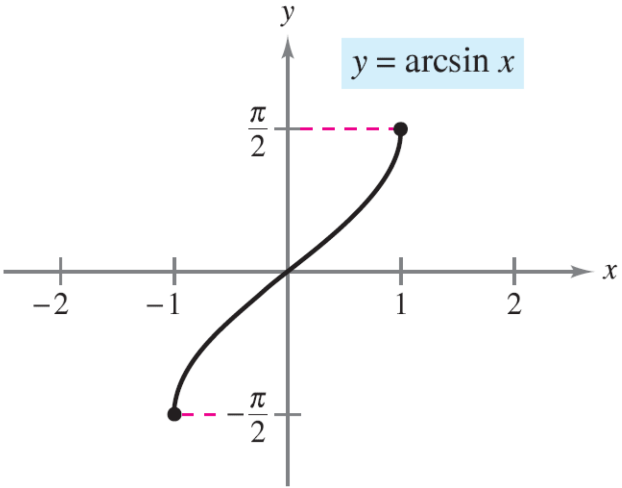
fonksiyonu birebir örten fonksiyon olduğundan

$$g^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona arksinüs $(\arcsin)$ fonksiyonu adı verilir. Buna göre

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad \text{ve} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

dir.


y
$y = \arcsin x$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
x
−2
−1
1
2

(iii)

$$f:\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\rightarrow\mathbb{R}$$

olmak üzere

$$f\left(x\right)=\tan x$$

fonksiyonu örten fakat birebir olmadığından $f\left(x\right)=\tan x$ fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}$ üzerinde ters fonksiyonu yoktur.

Bu fonksiyonun $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığına kısıtlaması olan

$$\tan\big|_{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

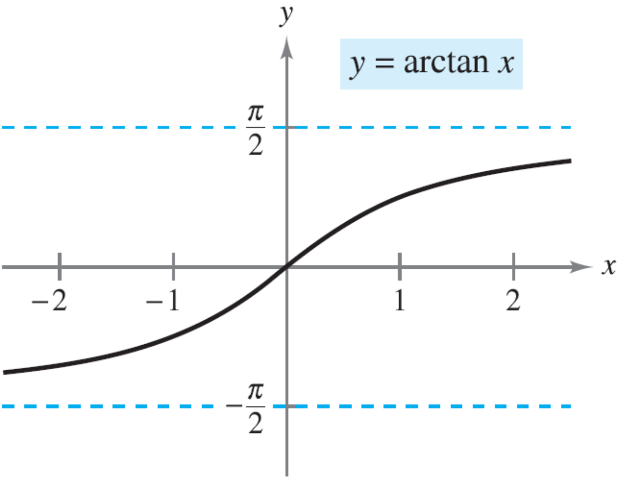
fonksiyonu birebir örten fonksiyon olduğundan

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona arktanjant $(\arctan)$ fonksiyonu adı verilir. Buna göre

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad \text{ve} \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

dir.


y
$y = \arctan x$
$\frac{\pi}{2}$
-2
-1
1
2
x
$-\frac{\pi}{2}$

(iv)

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$f(x) = \cot x$$

fonksiyonu örten fakat birebir olmadığından $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}$ üzerinde ters fonksiyonu yoktur.

Bu fonksiyonun $(0, \pi)$ aralığına kısıtlaması olan

$$\cot|_{(0,\pi)} = g : (0, \pi) \to \mathbb{R}$$

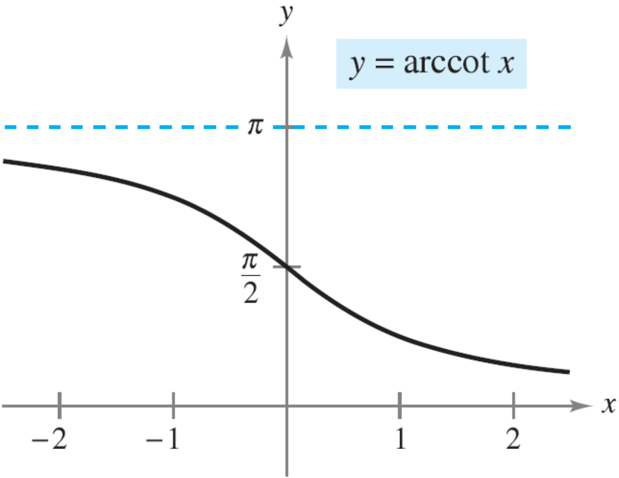
fonksiyonu birebir örten fonksiyon olduğundan

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona arkkotanjant (arccot) fonksiyonu adı verilir. Buna göre

$$y = \operatorname{arccot} x \iff x = \cot y \quad \text{ve} \quad y \in (0, \pi)$$

dir.


y
$y = \operatorname{arccot} x$
π
$\frac{\pi}{2}$
x
−2
−1
1
2

1.5.8. Hiperbolik Fonksiyonlar

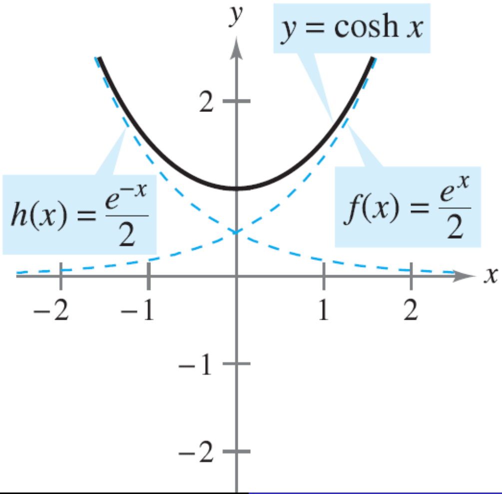
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ , \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ ,$$

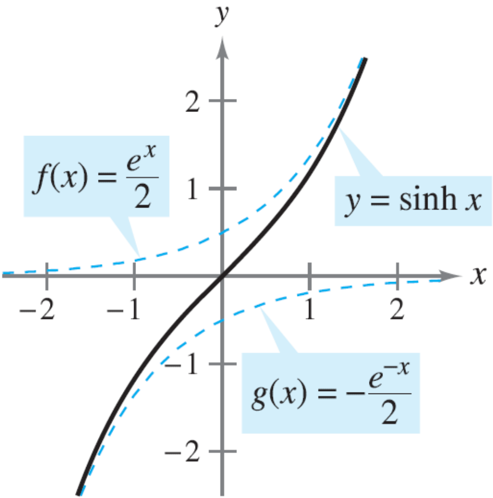
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ ,$$

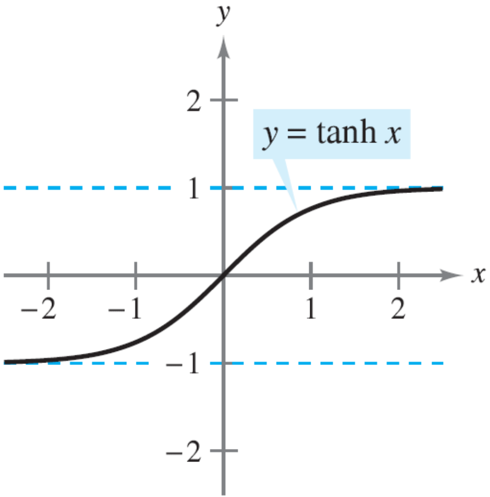
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

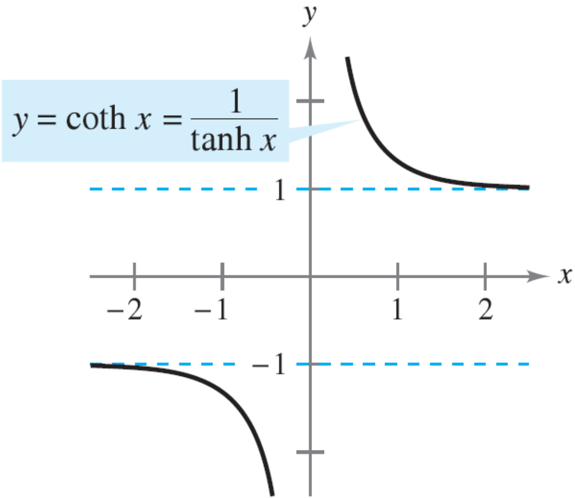
fonksiyonlarına sırasıyla hiperbolik kosinüs, hiperbolik sinüs, hiperbolik tanjant ve hiperbolik kotanjant fonksiyonu adı verilir.

Bu fonksiyonların grafikleri aşağıda verilmiştir.


y
$y = \cosh x$
2
$h(x) = \frac{e^{-x}}{2}$
$f(x) = \frac{e^{x}}{2}$
x
-2
-1
1
2
-1
-2


y
x
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
$f(x) = \frac{e^x}{2}$
$y = \sinh x$
$g(x) = -\frac{e^{-x}}{2}$


y
2
1
−1
−2
x
−2
−1
1
2
y = tanh x


$y = \coth x = \dfrac{1}{\tanh x}$
y
x
1
−1
−2
−1
1
2

Not 1.5.21.

Hiperbolik fonksiyonların aşağıdaki özellikleri vardır:
(i)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\cosh x) &= \mathcal{D}(\sinh x) = \mathcal{D}(\tanh x) = \mathbb{R} \\ \mathcal{D}(\coth x) &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\cosh x) &= [1, +\infty) \\ \mathcal{R}(\sinh x) &= \mathbb{R} \\ \mathcal{R}(\tanh x) &= (-1, 1) \\ \mathcal{R}(\coth x) &= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

dur.

(ii) Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \cosh(-x) &= \cosh x \\ \sinh(-x) &= -\sinh x \\ \tanh(-x) &= -\tanh x \end{aligned}$$

ve her $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$\coth(-x) = -\coth x$$

gerçeklenir.
(iii)

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

ve

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

dir.

(iv)

$$\begin{aligned}\cosh(x+t) &= \cosh x \cosh t + \sinh x \sinh t\\ \sinh(x+t) &= \sinh x \cosh t + \sinh t \cosh x\\ \tanh(x+t) &= \frac{\tanh x + \tanh t}{1 + \tanh x \tanh t}\end{aligned}$$

sağlanır.

(v)

$$\begin{aligned}
\cosh x \cosh t &= \frac{1}{2}\left\{\cosh(x+t) + \cosh(x-t)\right\} \\
\sinh x \sinh t &= \frac{1}{2}\left\{\cosh(x+t) - \cosh(x-t)\right\} \\
\sinh x \cosh t &= \frac{1}{2}\left\{\sinh(x+t) + \sinh(x-t)\right\}
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 1.5.22.

Rasyonel dereceli kuvvet fonksiyonlarından sonlu sayıda aritmetik işlem ve bileşke fonksiyon oluşturma kurallarının uygulanması ile elde edilebilen fonksiyonlara irrasyonel fonksiyonlar adı verilir. Örneğin;

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{1-x^2}\,, && x \in [-1,1] \\
y &= \sqrt[3]{x^4-2}\,, && x \in \mathbb{R} \\
y &= \frac{x-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^{\frac{2}{3}}+1}}\,, && x \in \mathbb{R} \\
y &= \log\sqrt{1-x^2}\,, && x \in (-1,1)
\end{aligned}$$

fonksiyonları irrasyonel fonksiyonlardır.

Not 1.5.23.

Elemanter olmayan fonksiyonlar da vardır. Örneğin;
(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olmak üzere $f(n) = n!$ faktöriyel fonksiyonu,
(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = [\![x]\!]$ tam değer fonksiyonu,
(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = sgnx = \begin{cases} -1 & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ 1 & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

işaret fonksiyonu

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = |x| = x sgn x$$

mutlak değer fonksiyonu,
(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

Dirichlet fonksiyonu

elemanter olmayan fonksiyonlardır.