MAT 109 ANALİZ I

Limit

Ankara Üniversitesi

5. Hafta

2.2.1. Temel Tanımlar ve Önermeler

Tanım 2.2.1.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in X'$ olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı var öyle ki

$$0 < |x - a| < \delta$$

koşulunu sağlayan her $x \in X$ için

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

sağlanıyorsa f fonksiyonunun a noktasındaki limiti L sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

veya

$$x \in X,\ x \to a \text{ için } f(x) \to L$$

şeklinde gösterilir (Cauchy -ye göre limit tanımı).

Not 2.2.2.

Yukardaki tanımı simgesel mantık dilinde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0\ \ni\ \forall x \in X\ \left(0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon\right)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq L \Longleftrightarrow \exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in X\ \left(0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon\right)$$

Diğer taraftan;

$$\begin{array}{rcc} 0 < |x-a| < \delta & \Longleftrightarrow & x \in \mathring{U}_{\delta}(a) \\ |f(x)-L| < \epsilon & \Longleftrightarrow & f(x) \in U_{\epsilon}(L) \\ |f(x)-L| \geq \epsilon & \Longleftrightarrow & f(x) \notin U_{\epsilon}(L) \end{array}$$

oldukları dikkate alınırsa yukarda verilen tanım aşağıdaki şekilde yazılabilir:

Tanım 2.2.3.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in X'$ olsun. L sayısının her

$$U_\epsilon(L)$$

komşuluğu için a sayısının en az bir

$$\mathring{U}_\delta(a)$$

komşuluğu var öyle ki her

$$x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap X$$

için

$$f(x) \in U_\epsilon(L)$$

sağlanıyorsa veya

$$f\left(\mathring{U}_\delta(a) \cap X\right) \subset U_\epsilon(L)$$

gerçekleniyorsa f fonksiyonunun a noktasındaki limiti L sayısıdır denir.

Not 2.2.4.

Yukardaki tanımı simgesel mantık dilinde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall U_\epsilon(L) \ \exists \mathring{U}_\delta(a) \ \ni \ f\left(\mathring{U}_\delta(a) \cap X\right) \subset U_\epsilon(L)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq L \iff \exists U_\epsilon(L) \ \forall \mathring{U}_\delta(a) \ \ni \ f\left(\mathring{U}_\delta(a) \cap X\right) \not\subset U_\epsilon(L)$$

Örnek 2.2.5.

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.2.6.

Limit tanımını kullanarak

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.2.7.

Limitin $(\epsilon - \delta)$ tanımını kullanarak

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{10 - x} = 3$$

olduğunu gösteriniz.

Tanım 2.2.8.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in X'$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in X \setminus \{a\}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

ise f fonksiyonunun a noktasındaki limiti L dir denir ve

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

veya

$$x \in X,\ x \to a \text{ için } f(x) \to L$$

biçiminde yazılır (Heine -ye göre limit tanımı).

Not 2.2.9.

Yukardaki tanımı simgesel mantık dilinde aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall (x_n)\ \ x_n \in X\backslash \{a\}\ \ \left(\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L\right)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq L \Longleftrightarrow \exists (x_n)\ \ \ni\ \ x_n \in X\backslash \{a\}\ \ \lim_{n\to\infty} x_n = a\ \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$$

Teorem 2.2.10.

Limitin Cauchy -ye göre tanımı ile Heine -ye göre tanımı denktir.

Örnek 2.2.11.

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

fonksiyonunun $x \to 0$ için limitinin mevcut olmadığını gösteriniz.

Tanım 2.2.12.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in X'$ olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı var öyle ki

$$a < x < a + \delta$$

koşulunu sağlayan her $x \in X$ için

$$|f(x) - L_1| < \epsilon$$

sağlanıyorsa f fonksiyonunun a noktasındaki sağ limiti L_1 sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1$$

veya

$$f(a^+) = L_1$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.13.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $a \in X'$ olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı var öyle ki

$$a - \delta < x < a$$

koşulunu sağlayan her $x \in X$ için

$$|f(x) - L_2| < \epsilon$$

sağlanıyorsa f fonksiyonunun a noktasındaki sol limiti L_2 sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

veya

$$f(a^-) = L_2$$

şeklinde gösterilir.

Cauchy -ye göre verilen Tanım 2.2.12 ve Tanım 2.2.13 -e denk olan aşağıdaki tanımları ifade edebiliriz.

Tanım 2.2.14.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon, $a \in X'$ ve $(a, +\infty) \cap X \neq \emptyset$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in X \setminus \{a\} \quad , \quad x_n > a$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L_1$$

ise f fonksiyonunun a noktasındaki sağ limiti L_1 dir denir ve

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$$

veya

$$f(a^+) = L_1$$

biçiminde yazılır.

Tanım 2.2.15.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon, $a \in X'$ ve $(-\infty, a) \cap X \neq \emptyset$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in X \backslash \{a\} \quad , \quad x_n < a$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L_2$$

ise f fonksiyonunun a noktasındaki sol limiti L_2 dir denir ve

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$$

veya

$$f(a^-) = L_2$$

biçiminde yazılır.

Teorem 2.2.16.

$\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyon, $a \in X'$,

$$(a, +\infty) \cap X \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad (-\infty, a) \cap X \neq \emptyset$$

olsun. f fonksiyonunun a noktasında limitinin mevcut olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun $f\left(a^{+}\right)$ ve $f\left(a^{-}\right)$ limitlerinin mevcut ve

$$f\left(a^{+}\right) = f\left(a^{-}\right)$$

olmasıdır.

Örnek 2.2.17.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek 2.2.18.

$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & ; \quad -2 \leq x < 1 \\ 3 & ; \quad x = 1 \\ x - 1 & ; \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyonun $a = 1$ noktasında sağ ve sol limitlerini hesaplayınız.

Tanım 2.2.19.

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$$

fonksiyon ve $L_1 \in \mathbb{R}$ olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı var öyle ki her

$$x > \delta$$

için

$$|f(x) - L_1| < \epsilon$$

sağlanıyorsa f fonksiyonunun $+\infty$ -da limiti L_1 sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_1$$

biçiminde yazılır.

Tanım 2.2.20.

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : (-\infty, c) \to \mathbb{R}$$

fonksiyon ve $L_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı var öyle ki her

$$x < -\delta$$

için

$$|f(x) - L_2| < \epsilon$$

sağlanıyorsa f fonksiyonunun $-\infty$ -da limiti L_2 sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$$

biçiminde yazılır.

Örnek 2.2.21.

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu için

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.2.22.

$$f(x) = \frac{x - [\![x]\!]}{\sqrt{x}}$$

şeklinde tanımlanan

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu için

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Cauchy -ye göre verilen Tanım 2.2.19 ve Tanım 2.2.20 -ye denk olan aşağıdaki tanımları ifade edebiliriz.

Tanım 2.2.23.

(i) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$$

fonksiyon ve $L_1 \in \mathbb{R}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n > c$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L_1$$

ise f fonksiyonunun $+\infty$ -da limiti L_1 sayısıdır denir ve

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_1$$

biçiminde yazılır.

(ii) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : (-\infty, c) \to \mathbb{R}$$

fonksiyon ve $L_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n < c$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L_2$$

ise f fonksiyonunun $-\infty$ -da limiti L_2 sayısıdır denir ve

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$$

biçiminde yazılır.

Örnek 2.2.24.

$$f(x) = \sin x$$

fonksiyonunun $+\infty$ -da limiti mevcut değildir. Gösteriniz.

Tanım 2.2.25.

Aşağıdaki önermeler doğrudur:

(i)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = L_2$$

ise $L_1 = L_2$ dir.

(ii)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

ise en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\mathring{U}_{\delta}(a) \cap X$$

kümesinde f fonksiyonu sınırlıdır.

(*iii*)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

limitleri mevcut ise bu durumda $f+g, f-g, fg$ fonksiyonlarının da $x \to a$ için limitleri mevcuttur ve

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] &= L_1+L_2\\ \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] &= L_1-L_2\\ \lim_{x\to a}[f(x)\,g(x)] &= L_1L_2\end{aligned}$$

gerçeklenir. Ayrıca eğer her $x \in X$ için $g(x) \neq 0$ ve $L_2 \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonun da $x \to a$ için limiti mevcuttur ve

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

sağlanır.

(iv)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a} g(x) = L_2$$

limitleri mevcut ve her $x \in X$ için

$$f(x) \leq g(x)$$

ise

$$L_1 \leq L_2$$

gerçeklenir.

(v) Her $x \in X$ için

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

ise

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

dir.

(vi)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

ise

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$$

dir.

Örnek 2.2.26.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Teorem 2.2.27. (Bileşke Fonksiyonun Limiti)

$X, Y \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$, $b \in Y'$, $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \text{ve} \qquad \lim_{y \to b} g(y) = A$$

olsun. Eğer her $x \in X \setminus \{a\}$ için

$$f(x) \neq b \qquad \text{ve} \qquad f(x) \in Y$$

ise bu durumda

$$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

bileşke fonksiyonunun a noktasındaki limiti mevcuttur ve

$$\lim_{x \to a} F(x) = A$$

dır.

Örnek 2.2.28.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

olduğunu gösteriniz.

$X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$i = \inf X \quad \text{ve} \quad s = \sup X$$

olsun.

Teorem 2.2.29.

$X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesi üzerinde monoton artan fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{x \to i^+} f(x) = \inf \{f(x) : x \in X\}$$

ve

$$\lim_{x \to s^-} f(x) = \sup \{f(x) : x \in X\}$$

dir.

Teorem 2.2.30.

$X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X kümesi üzerinde monoton azalan fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{x \to i^+} f(x) = \sup \{f(x) : x \in X\}$$

ve

$$\lim_{x \to s^-} f(x) = \inf \{f(x) : x \in X\}$$

dir.

Tanım 2.2.31.

$X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$, $L \in \mathbb{R}$ noktaları verilmiş olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in X \setminus \{a\}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

koşullarını sağlayan bir (x_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

oluyorsa L sayısına f fonksiyonunun $x \to a$ için hususi (veya özel) limiti denir.

Not 2.2.32.

Söz konusu L sayısı genelde farklı (x_n) dizileri için farklıdır. Dolayısıyla aşağıdaki küme

$$L_f(a) = \{L : f \text{ fonksiyonunun } x \to a \text{ için özel limiti } L\}$$

olarak tanımlansın.

Örnek 2.2.33.

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ile tanımlı fonksiyonun $x \to 0$ için husussi (özel) limitlerini bulunuz.

Tanım 2.2.34.

$X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$ noktası verilmiş olsun.

$$L_f\left(a\right)$$

kümesinin maksimumuna f fonksiyonunun $x \to a$ için üst limiti,

$$L_f\left(a\right)$$

kümesinin minimumuna f fonksiyonunun $x \to a$ için alt limiti denir ve sırasıyla

$$\overline{\lim_{x\to a}} f\left(x\right) \quad , \quad \underline{\lim_{x\to a}} f\left(x\right)$$

biçiminde gösterilir.

Not 2.2.35.

Yukarda verilen tanıma göre

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) = \max L_f(a)$$

ve

$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x) = \min L_f(a)$$

dır.

Not 2.2.36.

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

fonksiyonunun $x \to 0$ için alt ve üst limitleri Örnek 2.2.33 dikkate alınırsa

$$\overline{\lim_{x \to a}} f(x) = \max L_f(0) = 1$$

ve

$$\underline{\lim_{x \to a}} f(x) = \min L_f(0) = -1$$

olduğu görülür.

Teorem 2.2.37.

$X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X'$ noktası verilmiş olsun. Bu durumda

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \overline{\lim_{x \to a}} f(x) = L = \underline{\lim_{x \to a}} f(x)$$

dir.

2.2.2. Belirsiz İfadeler

$X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $a \in X'$ ($a \in \mathbb{R}$ veya $a = \mp\infty$ olabilir) noktası ve $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilmiş olsun.

I. DURUM

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

sonlu limitleri mevcut ise

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

dir.

(i) $L_1 = L_2 = 0$ olması durumunda

$$\frac{f}{g}$$

fonksiyonunun $x \to a$ için limitinin varlığı üzerine kesin birşey söylenemez. O halde $x \to a$ için

$$\frac{f}{g}$$

fonksiyonu

$$\frac{0}{0}$$

şeklinde belirsizlik oluşturur.

Örneğin;

$(a)\ f(x) = |x|$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

olup

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

dur.

(b) $f(x) = x^2$ ve $g(x) = x$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

olup

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

dır.

(c) $f(x) = xsgnx$ ve $g(x) = x$ fonksiyonları için

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

olup

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} sgnx$$

ifadesi mevcut değildir.

(ii) $L_1 = L_2 = +\infty$ (veya $L_1 = L_2 = -\infty$) olması durumunda

$$\frac{f}{g}$$

fonksiyonunun $x \to a$ için limitinin varlığı üzerine kesin birşey söylenemez. O halde $x \to a$ için

$$\frac{f}{g}$$

fonksiyonu

$$\frac{\infty}{\infty}$$

şeklinde belirsizlik oluşturur.

II. DURUM

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

ise

$$f.g$$

fonksiyonunun $x \to a$ için limitinin varlığı üzerine kesin birşey söylenemez. O halde $x \to a$ için

$$f.g$$

fonksiyonu

$$0.\infty$$

şeklinde belirsizlik oluşturur.

III. DURUM

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

ise

$$f - g$$

fonksiyonunun $x \to a$ için limitinin varlığı üzerine kesin birşey söylenemez. O halde $x \to a$ için

$$f - g$$

fonksiyonu

$$\infty - \infty$$

şeklinde belirsizlik oluşturur.

IV. DURUM

(i)

$$\lim_{x\to a} f(x) = b > 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c$$

ise

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = b^c$$

dir.

(ii)

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c > 0 \ \ (veya\ c = +\infty)$$

ise

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = 0$$

dir.

(iii)

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c < 0 \ \ (veya\ c = -\infty)$$

ise

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = +\infty$$

dur.
(iv)

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ise $x \to a$ için

$$[f(x)]^{g(x)}$$

fonksiyonu

$$0^0$$

şeklinde bir belirsizlik oluşturur.

(v)

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c > 0 \ \ (veya\ c = +\infty)$$

ise

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = +\infty$$

dur.

(vi)

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c < 0 \ \ (veya\ c = -\infty)$$

ise

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = 0$$

dır.

(vii)
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$
ise $x \to a$ için
$$[f(x)]^{g(x)}$$
fonksiyonu
$$\infty^0$$
şeklinde bir belirsizlik oluşturur.

$(viii)$

$$\lim_{x\to a} f(x) = 1 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

ise $x \to a$ için

$$[f(x)]^{g(x)}$$

fonksiyonu

$$1^{\infty}$$

şeklinde bir belirsizlik oluşturur.

2.2.3. Temel Elemanter Fonksiyonların Limitleri

I. Sabit Fonksiyonun Limiti

$c \in \mathbb{R}$ sabit reel sayı olmak üzere

$$f(x) = c$$

biçiminde tanımlı

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu için

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c$$

olduğu açıktır.

II. Üstel Fonksiyonun Limiti

(i) Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

dır.

(ii) $a > 1$ için

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

ve

$0 < a < 1$ için

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

oldukları gösterilebilir.

III. Logaritma Fonksiyonunun Limiti

(i) Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}_+$ için

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

dır.

(ii) $a > 1$ için

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

ve

$0 < a < 1$ için

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty \qquad \text{ve} \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

dur.

IV. Kuvvet Fonksiyonunun Limiti

$\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = x^{\alpha}$$

biçiminde tanımlı

$$f : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R}$$

kuvvet fonksiyonu için
(i) Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}_{+}$ için

$$\lim_{x \to x_0} x^{\alpha} = x_0^{\alpha}$$

dır.

(ii)

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & ; \quad \alpha > 0 \\ +\infty & ; \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

ve

$$\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & ; \quad \alpha > 0 \\ 0 & ; \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

dır.

V. Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

(i) Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

dır.

(ii) Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

dır.

(iii) Keyfi $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ için

$$\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$$

dır.
(iv) Keyfi $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ için

$$\lim_{x \to x_0} \cot x = \cot x_0$$

dır.

VI. Ters Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

(i) Keyfi $x_0 \in [-1, 1]$ için

$$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$$

dır.

(ii) Keyfi $x_0 \in [-1, 1]$ için

$$\lim_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0$$

dır.

(iii) Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x \to x_0} \arctan x = \arctan x_0$$

dır.

(iv) Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot} x_0$$

dır.

VII. Polinom Fonksiyonların Limiti

$a_n \neq 0$ olmak üzere $a_0, a_1, ..., a_n$ herhangi reel sayıları için

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

polinom olsun. Bu durumda keyfi $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{x \to x_0} p_n(x) = p_n(x_0)$$

dır.