MAT 110 ANALİZ II

Belirsiz İntegraller

Ankara Üniversitesi

2. Hafta

Teorem 5.2.1.

$J \subset \mathbb{R}$ ve $\varphi(J) = I$ olmak üzere

$$\varphi : J \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu J üzerinde sürekli türeve sahip fonksiyon ve

$$f : I \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun I üzerindeki herhangi bir ilkel fonksiyonu

$$F : I \to \mathbb{R}$$

olsun.

Bu durumda

$$(f \circ \varphi) . \varphi' : J \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun J üzerindeki bir ilkel fonksiyonu

$$F \circ \varphi : J \to \mathbb{R}$$

dır ve

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) + C \tag{5.1}$$

sağlanır.

Not 5.2.2.

$\varphi(x) = y$ denilirse

$$\begin{aligned} F(\varphi(x)) + C &= F(y) + C \\ &= \int f(y)\,dy \end{aligned}$$

olup (5.1) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy \tag{5.2}$$

elde edilir.
Ancak dikkat edilmelidir ki; (5.2) ifadesinin sağ tarafındaki $\int f(y)\,dy$ integrali hesaplandıktan sonra $y = \varphi(x)$ dönüşümü yardımıyla tekrar x değişkenine geçilmelidir.

Not 5.2.3.

$$\int f(y)\,dy$$

integralinde $y = \varphi(x)$ değişken değiştirmesi yapılırsa
$dy = \varphi'(x)\,dx$ olduğu dikkate alınırsa

$$\int f(y)\,dy = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \qquad (5.3)$$

ifadesi elde edilir.
Ancak dikkat edilmelidir ki; (5.3) ifadesinin sağ tarafındaki
$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ integrali hesaplandıktan sonra $x = \varphi^{-1}(y)$
dönüşümü yardımıyla tekrar y değişkenine geçilmelidir.

Örnek 5.2.4.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a) \quad \int \frac{t}{1+t^2}dt$$

$$(b) \quad \int \frac{(\arctan t)^{100}}{1+t^2}dt$$

$$(c) \quad \int \frac{dt}{(t-a)^k} \quad , \quad (k \in \mathbb{N},\ t \neq a)$$

(I) $\sqrt{a^2 - x^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için

$$x = a \sin t$$

değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek 5.2.5.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(II) $\sqrt{x^2 - a^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için

$$x = \frac{a}{\cos t}$$

değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek 5.2.6.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$$

ifadesini hesaplayınız.

(III) $\sqrt{a^2 + x^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için

$$x = a \tan t$$

değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek 5.2.7.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$$

ifadesini hesaplayınız.

(IV) $\sqrt[n_i]{ax+b}$ şeklindeki ifadeleri içeren fonksiyonların integralini hesaplamak için n_i kök kuvvetlerinin en küçük ortak katı p olmak üzere

$$ax + b = t^p$$

değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek 5.2.8.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(V) Trigonometrik fonksiyonlar cinsinden rasyonel olarak ifade edilen fonksiyonların integrali için yarım açı yöntemi adı verilen

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

değişken değiştirmesi yapılır.

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &= 2\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

olup

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{t^2+1} - \frac{t^2}{t^2+1}\end{aligned}$$

olup

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

elde edilir.

Ayrıca; $\tan\frac{x}{2} = t$ olduğundan

$$\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx = dt \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)dx = dt$$

olup

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

olur.

Dolayısıyla, bu değişken değiştirmesinden sonra verilen belirsiz integral t değişkenine göre bir rasyonel ifadenin integraline indirgenir.

Örnek 5.2.9.

$$\int \frac{1+\sin x}{\cos x\,(1+\cos x)}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Teorem 5.2.10.

$u, v : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları I aralığında türevlenebilir olsun. Eğer, vu' fonksiyonu I aralığında integrallenebilir ise uv' fonksiyonu da I aralığında integrallenebilirdir ve

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx \tag{5.4}$$

sağlanır.

Not 5.2.11.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} du\left(x\right) & = & u'\left(x\right)dx \\ dv\left(x\right) & = & v'\left(x\right)dx \end{array} \right.$$

oldukları dikkate alınırsa (5.4) ifadesi ile verilen kısmi integrasyon formülü

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{5.5}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Not 5.2.12.

Kısmi integrasyon yöntemi ile integral hesaplarken, (5.5) ifadesindeki sağ taraftaki integralin bulunması sol taraftaki integralin bulunmasından kolay olacak şekilde u ve dv ifadeleri seçilmelidir.

Örnek 5.2.13.

$x \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere

$$\int x^3 \ln^2 x dx$$

integralini hesaplayınız.

Örnek 5.2.14.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\int \sin^n x dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek 5.2.15.

$n \geq 2$ olmak üzere

$$\int \frac{1}{\cos^n x} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek 5.2.16.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^n} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(I) $b^2 - 4ac < 0$ olmak üzere

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

tipindeki integraller için

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

olduğu dikkate alınıp $u = x + \frac{b}{2a}$ değişken değiştirmesi yapılırsa ve $k^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ denilirse

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} &= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}} \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2+k^2} \\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{u}{k}\right)+\tilde{C} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)+\tilde{C}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

Örnek 5.2.17.

$$\int \frac{1}{x^2 - 8x + 20} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(II) $b^2 - 4ac < 0$ olmak üzere

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$$

tipindeki integraller için

$$Ax + B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + B - \frac{Ab}{2a}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx &= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx \\
&\quad + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \\
&= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| \\
&\quad + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukardaki eşitliğin sağ tarafındaki integral (I) tipinde integraldir.

Örnek 5.2.18.

$$\int \frac{x+3}{x^2-6x+10}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(III) $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \quad , \quad (a_0 \neq 0) \\ Q_m(x) &= b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m \quad , \quad (b_0 \neq 0) \end{aligned}$$

ve $Q_m(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

kesirine rasyonel kesir adı verilir. Eğer, $n < m$ ise bu rasyonel kesire düzgün rasyonel kesir, $n \geq m$ ise bu rasyonel kesire düzgün olmayan rasyonel kesir adı verilir.

(i) $n < m$ olması durumunda; aşağıdaki temel teorem,

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$$

düzgün rasyonel kesirlerin integralinin nasıl hesaplanacağı hakkında bilgi verecektir.

Teorem 5.2.19.

$\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_l \in \mathbb{Z}_+$ olmak üzere

$$\alpha_1 + ... + \alpha_k + 2(\beta_1 + ... + \beta_l) = m,$$

$d_1, ..., d_k, p_1, q_1, ..., p_l, q_l \in \mathbb{R}$ olmak üzere $s = 1, ..., n$ için

$$p_s^2 - 4q_s < 0$$

ve

$$\begin{aligned} Q_m(x) &= (x - d_1)^{\alpha_1} ... (x - d_k)^{\alpha_k} \\ &\times \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{\beta_1} ... \left(x^2 + p_l x + q_l\right)^{\beta_l} \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ düzgün rasyonel kesiri

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1^{(1)}}{x-d_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-d_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x-d_1)^{\alpha_1}}+\ldots\\ &+\frac{A_1^{(k)}}{x-d_k}+\frac{A_2^{(k)}}{(x-d_k)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha_k}^{(k)}}{(x-d_k)^{\alpha_k}}\\ &+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_2^{(1)}x+C_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{B_{\beta_1}^{(1)}x+C_{\beta_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\ldots\\ &+\frac{B_1^{(l)}x+C_1^{(l)}}{x^2+p_lx+q_l}+\frac{B_2^{(l)}x+C_2^{(l)}}{(x^2+p_lx+q_l)^2}+\ldots+\frac{B_{\beta_l}^{(l)}x+C_{\beta_l}^{(l)}}{(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l}}\end{aligned}$$

biçiminde basit rasyonel kesirler adı verilen kesirlerin toplamı şeklinde gösterilebilir.

Örnek 5.2.20.

$$\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(ii) $n \geq m$ ise

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = K_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$$

biçiminde yazılabilir, burada $K_{n-m}(x)$ polinomu $n-m$ -inci dereceden, $R_k(x)$ polinomu $k < m$ olmak üzere k -ıncı dereceden polinomdur. Dolayısıyla düzgün olmayan bir rasyonel kesrin integrali, belirli bir polinomun integrali ile bir düzgün rasyonel kesrin integralinin toplamına eşittir.

Örnek 5.2.21.

$$\int \frac{2x^3 + x^2 - 4x + 7}{x^2 + x - 2}$$

ifadesini hesaplayınız.