MAT 110 ANALİZ II

Belirsiz İntegraller

Ankara Üniversitesi

3. Hafta

(I)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

tipindeki integrallerin hesaplanması a, b ve c katsayılarının durumuna göre değişir.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]} \tag{5.6}$$

eşitliği dikkate alınırsa

(i) $b^2 - 4ac > 0$ ve $a < 0$ ise (5.6) eşitliğindeki köklü ifadenin içi $k^2 - u^2$ şeklinde bir ifadeye dönüşür. Dolayısıyla

$$\int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{k}\right) + C$$

yardımıyla verilen integral hesaplanır.

(ii) $b^2 - 4ac > 0$ ve $a > 0$ ise (5.6) eşitliğindeki köklü ifadenin içi $u^2 - k^2$ şeklinde bir ifadeye dönüşür. Dolayısıyla

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - k^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - k^2}\right) + C$$

yardımıyla verilen integral hesaplanır.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ ve $a > 0$ ise (5.6) eşitliğindeki köklü ifadenin içi $u^2 + k^2$ şeklinde bir ifadeye dönüşür. Dolayısıyla

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + k^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + k^2}\right) + C$$

yardımıyla verilen integral hesaplanır.

(iv) $b^2 - 4ac = 0$ ve $a > 0$ ise $ax^2 + bx + c$ bir tam kare olup bu ifade kök dışına çıkar. Dolayısıyla basit bir değişken değiştirmeyle integral hesaplanır.

Örnek 5.2.22.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek 5.2.23.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$$

ifadesini hesaplayınız.

(II)

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

tipindeki integralin hesaplanması için

$$Ax+B=\frac{A}{2a}\left(2ax+b\right)+B-\frac{Ab}{2a}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx &= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ &+ \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\ &= \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \\ &+ \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Yukardaki eşitliğin sağındaki integral (I) tipinde olup bu integralin nasıl hesaplanacağı detaylı olarak incelenmiştir.

Örnek 5.2.24.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(III)

$$\int \frac{dx}{(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

tipindeki integrali hesaplamak için

$$\frac{1}{Ax+B}=t$$

değişken değiştirmesi yapılırsa verilen integral (II) tipindeki integrale indirgenir.

Örnek 5.2.25.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

ifadesini hesaplayınız.

(IV) n -inci dereceden polinom $P_n(x)$ olmak üzere

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \tag{5.7}$$

tipindeki integral

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \tag{5.8}$$

şeklinde yazılabilir, burada $Q_{n-1}(x)$ polinomu $n-1$ -inci dereceden bilinmeyen katsayılı bir polinom ve λ bilinmeyen bir reel sayıdır.

(5.7) tipinde belirtilen integrali hesaplamak için ilk olarak (5.8) ifadesinin her iki tarafının x değişkenine göre türevi alınır, ifadenin sağ tarafı ortak paydaya getirilir ve aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse $Q_{n-1}(x)$ polinomunun katsayıları ve λ reel sayısı bulunur. Dolayısıyla (5.8) ifadesinin sol tarafındaki integral (I) tipindeki integrale indirgenir.

Örnek 5.2.26.

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(V) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\int \frac{dx}{(x-p)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

tipindeki integrali hesaplamak için

$$\frac{1}{x-p} = t$$

değişken değiştirmesi yapılırsa verilen integral (IV) tipindeki integrale indirgenir.

Örnek 5.2.27.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$$

ifadesini hesaplayınız.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $p, q, r \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$x^r \left(a + bx^p\right)^q dx$$

şeklindeki ifadeye binom diferensiyeli

$$\int x^r \left(a + bx^p\right)^q dx \tag{5.9}$$

biçimindeki integrale de binom integrali denir.

$$\begin{array}{ll} (i) & q \text{ tam sayı,} \\ (ii) & \frac{r+1}{p} \text{ tam sayı,} \\ (iii) & \frac{r+1}{p} + q \text{ tam sayı,} \end{array}$$

durumlarından birinin sağlanması halinde (5.9) tipindeki integral elemanter fonksiyonlarla ifade edilebilir.

(i) $q \in \mathbb{Z}$ ise r ile p sayılarının paydalarının en küçük ortak katı k olmak üzere (5.9) ifadesinde

$$x = t^k$$

değişken değiştirmesi yapılır.

(ii) $\frac{r+1}{p} \in \mathbb{Z}$ ise q sayısının paydası n olmak üzere (5.9) ifadesinde

$$a + bx^p = t^n$$

değişken değiştirmesi yapılır.

(iii) $\frac{r+1}{p} + q \in \mathbb{Z}$ ise q sayısının paydası n olmak üzere (5.9) ifadesinde

$$ax^{-p} + b = t^n$$

değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek 5.2.28.

$$\int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(I) İki farklı açının sinüs ve kosinüs değerlerinin çarpımını içeren integraller birçok uygulama alanında karşımıza çıkabilir. Bu tip integrallerde aşağıdaki toplam çarpım formülleri kullanılır:

$$\begin{aligned}
\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}\left\{\cos\left[(m-n)x\right] - \cos\left[(m+n)x\right]\right\} \\
\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left\{\sin\left[(m-n)x\right] + \sin\left[(m+n)x\right]\right\} \\
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left\{\cos\left[(m-n)x\right] + \cos\left[(m+n)x\right]\right\}
\end{aligned}$$

Örnek 5.2.29.

$$\int \sin 5x \cos 4x \; dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(II) $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

tipindeki integraller m ve n sayılarının durumuna göre farklı değişken değiştirmeleri yapılarak hesaplanır.

(i) m sayısı tek ise

$$\cos x = t$$

değişken değiştirmesi yapılır.

(ii) n sayısı tek ise

$$\sin x = t$$

değişken değiştirmesi yapılır.

(iii) m ve n sayılarının her ikisi de çift sayı ise

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{ve} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

özdeşlikleri yardımıyla integrant kosinüsün tek kuvvetlerine dönüştürülür.

Örnek 5.2.30.

$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Tanım 5.2.31.

$a_{00}, a_{10}, a_{01}, ..., a_{0n}$ reel sayılar olmak üzere

$$P_n(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + ... + a_{0n}y^n$$

şeklindeki fonksiyona x ve y değişkenlerinin kuvvetlerine göre n -inci dereceden polinom adı verilir.

Tanım 5.2.32.

x ve y değişkenlerine göre n -inci dereceden polinom $P_n(x,y)$, m -inci dereceden polinom $Q_m(x,y)$ olmak üzere

$$R(x,y) = \frac{P_n(x,y)}{Q_m(x,y)}$$

kesirine x ve y değişkenlerine göre iki değişkenli rasyonel fonksiyon adı verilir. $R(f(x), g(x))$ ifadesine de f ve g fonksiyonlarının rasyonel fonksiyonu adı verilir. Örneğin;

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x + 2\cos x}{\cos^2 x \sin x + 1}$$

fonksiyonu $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının rasyonel fonksiyonudur.

(III)

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

tipindeki integral hesaplanırken

(i) Eğer

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

ise bu durumda

$$t = \cos x$$

değişken değiştirmesi yapılır.

(ii) Eğer

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

ise bu durumda

$$t = \sin x$$

değişken değiştirmesi yapılır.

(iii) Eğer

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

ise bu durumda

$$t = \tan x$$

değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek 5.2.33.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x\,(\sin x + \cos x)}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

(IV) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$I_n(x) = \int \tan^n x \, dx$$

tipindeki integralleri dikkate alalım.

$n = 1$ olsun. Bu durumda

$$I_1(x) = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

dir.

$n > 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int \tan^n x dx &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \left(1 + \tan^2 x - 1\right) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \left(1 + \tan^2 x\right) dx - \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$I_n(x) = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}(x)$$

indirgeme formülü elde edilir.