MAT 110 ANALİZ II

Belirli İntegraller (Riemann İntegrali)

Ankara Üniversitesi

4. Hafta

Tanım 6.1.1.

$[a, b]$ aralığının

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b = x_n$$

özelliğini sağlayan her

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

sonlu alt kümesine $[a, b]$ aralığının bir parçalanması denir.

$k = 1, 2, ..., n$ için

$$[x_{k-1}, x_k]$$

aralıklarına $[a, b]$ aralığının $\mathcal{P}$ parçalanmasına karşılık gelen kapalı alt aralıkları,

$$(x_{k-1}, x_k)$$

aralıklarına da $[a, b]$ aralığının $\mathcal{P}$ parçalanmasına karşılık gelen açık alt aralıkları adı verilir.

6.1. Temel Kavramlar

Tanım 6.1.2.

$[a, b]$ aralığının bir parçalanması

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

olsun. $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$$

sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının boyu adı verilir.

Δx_1, $\Delta x_2, ...,$ Δx_n sayılarının en büyüğüne $\mathcal{P}$ parçalanmasının normu denir ve $\|\mathcal{P}\|$ ile gösterilir. Yani,

$$\|\mathcal{P}\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, ..., n\}$$

dir.

6.1. Temel Kavramlar

Eğer özel olarak

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n$$

yani $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\Delta x_k = \frac{b - a}{n}$$

ise $\mathcal{P}$ parçalanmasına $[a, b]$ aralığının düzgün parçalanması adı verilir.

Tanım 6.1.3.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

sembolü

$$a_1 + a_2 + ... + a_n$$

toplamını belirtir. a_1 sayısı birinci terim, a_2 sayısı ikinci terim,...ve a_n sayısı n -inci terim olarak isimlendirilir. k değerleri 1 -den n -ye kadar olan tamsayı değerlerini alır.

Not 6.1.4.

(i)

$\sum_{k=1}^{5} k$	$1+2+3+4+5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1 1 + (-1)^2 2 + (-1)^3 3$	-2
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{7}{6}$

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere sonlu toplamlar için aşağıdaki

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (a_k \mp b_k) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \mp \sum_{k=1}^{n} b_k \\ \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k) &= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \\ \sum_{k=1}^{n} (\lambda) &= n\lambda \end{aligned}$$

cebir kuralları gerçeklenir.

(iii) İlk n doğal sayının toplamı, ilk n doğal sayının kareleri toplamı ve ilk n doğal sayının küpleri toplamı için aşağıdaki formüller gerçeklenir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2}\\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\end{aligned}$$

Tanım 6.2.1.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon, $[a, b]$ aralığının bir parçalanması

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

ve herbir $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\begin{aligned} m_k &= \inf \{f(t) : x_{k-1} \le t \le x_k\} \\ M_k &= \sup \{f(t) : x_{k-1} \le t \le x_k\} \end{aligned}$$

olsun.

6.2. Darboux Metodu

Buna göre;

$$A\left(f,\mathcal{P}\right)=\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

ifadesine f fonksiyonunun $\mathcal{P}$ parçalanmasına karşılık gelen alt Darboux toplamı,

$$\ddot{U}\left(f,\mathcal{P}\right)=\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

ifadesine f fonksiyonunun $\mathcal{P}$ parçalanmasına karşılık gelen üst Darboux toplamı adı verilir.

Not 6.2.2.

(i) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon olduğundan m_k ve M_k sayıları mevcuttur.

(ii) Eğer, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise bu durumda

$$\begin{aligned} M_k &= f(t_k) \\ m_k &= f(s_k) \end{aligned}$$

olacak şekilde $t_k, s_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sayıları mevcuttur.

Not 6.2.3.

$[a, b]$ aralığının keyfi parçalanması $\mathcal{P}$ olsun. Bu durumda her $k = 1, ..., n$ için $m_k \leq M_k$ olduğundan

$$A(f, \mathcal{P}) \leq Ü(f, \mathcal{P})$$

gerçeklenir.

Not 6.2.4.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan sürekli fonksiyonu için f fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alana dış dikdörtgensel yaklaşımı $Ü(f, \mathcal{P})$, iç dikdörtgensel yaklaşımı $A(f, \mathcal{P})$ temsil eder.

Teorem 6.2.5.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyon olmak üzere $\forall t\in[a,b]$ için

$$m\le f(t)\le M$$

olacak şekilde $m,M\in\mathbb{R}$ sayıları mevcut olsun. Bu durumda $[a,b]$ aralığının keyfi $\mathcal{P}$ parçalanması için

$$m(b-a)\le A(f,\mathcal{P})\le \ddot{U}(f,\mathcal{P})\le M(b-a)$$

gerçeklenir.

Sonuç 6.2.6.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left\{\ddot{U}\left(f,\mathcal{P}\right):\mathcal{P},\ \ [a,b]\ \text{ aralığının parçalanması}\right\}$$

kümesi üstten sınırlı,

$$\left\{A\left(f,\mathcal{P}\right):\mathcal{P},\ \ [a,b]\ \text{ aralığının parçalanması}\right\}$$

kümesi alttan sınırlıdır.

6.2. Darboux Metodu

Tanım 6.2.7.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon olsun.

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)\,dx = \inf\left\{\ddot{U}(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P},\ \ [a, b]\ \text{ aralığının parçalanması}\right\}$$

ifadesine $[a, b]$ aralığında f fonksiyonunun üst Darboux integrali,

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \sup\left\{A(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P},\ \ [a, b]\ \text{ aralığının parçalanması}\right\}$$

ifadesine $[a, b]$ aralığında f fonksiyonunun alt Darboux integrali adı verilir.

Not 6.2.8.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon olsun.

$$\left\{ \ddot{U}\left(f, \mathcal{P}\right) : \mathcal{P},\ \ [a, b] \text{ aralığının parçalanması} \right\}$$

$$\left\{ A\left(f, \mathcal{P}\right) : \mathcal{P},\ \ [a, b] \text{ aralığının parçalanması} \right\}$$

kümeleri boş kümeden farklı ve sınırlı olduğundan dolayı f fonsiyonunun alt Darboux integrali ve üst Darboux integrali daima mevcuttur.

Lemma 6.2.9.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması $\mathcal{P}$ ve bir diğer parçalanması $\mathcal{P}^*$ öyle ki

$$\mathcal{P}\subset\mathcal{P}^*$$

olsun. Bu durumda

$$A(f,\mathcal{P})\leq A(f,\mathcal{P}^*)\leq \ddot{U}(f,\mathcal{P}^*)\leq \ddot{U}(f,\mathcal{P})$$

gerçeklenir.

Teorem 6.2.10.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. Bu durumda

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx$$

gerçeklenir.

Not 6.2.11.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı ise $[a,b]$ aralığında f fonksiyonunun alt Darboux integrali ve üst Darboux integrali her zaman mevcuttur ve

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx$$

gerçeklenir. İleride göreceğimiz üzere; fonksiyonların geniş bir sınıfı vardır öyle ki bu sınıfa ait olan fonksiyonlar için

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx$$

sağlanır.

Tanım 6.2.12.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun.

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, dx = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)\, dx$$

ise f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında Riemann integrallenebilirdir ya da integrallenebilirdir denir. Bu ortak değer

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

ile gösterilir ve bu değere f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında Riemann integrali ya da integrali adı verilir.

$[a, b]$ aralığında Riemann integrallenebilir fonksiyonların sınıfı $\mathcal{R}[a, b]$ ile gösterilir. Ayrıca, eğer $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ise

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

olarak tanımlanır.

Not 6.2.13.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyon olmak üzere $\forall t \in [a,b]$ için

$$m \leq f(t) \leq M$$

olacak şekilde $m, M \in \mathbb{R}$ sayıları mevcut olsun. Teorem 6.2.5 dikkate alınırsa

$$m(b-a) \leq \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{\bar{b}} f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

gerçeklenir.

Eğer $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ise

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

olarak yazılabilir.

Sonuç 6.2.14.

$\forall t \in [a,b]$ için $f(t) \geq 0$ ve $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

dır.

Örnek 6.2.15.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

olarak bilinen Dirichlet fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Riemann integrallenebilir değildir. Gösteriniz.

Örnek 6.2.16.

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = x$$

fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında Riemann integrallenebilir midir ? Açıklayınız.

Teorem 6.2.17. (Riemann Şartı)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon olsun. $[a, b]$ aralığında f fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $\epsilon > 0$ sayısı için $[a, b]$ aralığının bir $\mathcal{P}$ parçalanması vardır öyle ki

$$\ddot{U}(f, \mathcal{P}) - A(f, \mathcal{P}) < \epsilon \tag{6.1}$$

gerçeklenmesidir.

Not 6.2.18.

(6.1) ifadesini gerçekleyen $[a,b]$ aralığının bir parçalanması $\mathcal{P}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^*$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığının her $\mathcal{P}^*$ parçalanması için de

$$\ddot{U}\left(f,\mathcal{P}^*\right) - A\left(f,\mathcal{P}^*\right) < \epsilon$$

gerçeklenir.