MAT 110 ANALİZ II

Belirli İntegraller (Riemann İntegrali)

Ankara Üniversitesi

7. Hafta

6.5. İntegral Hesabın Temel Teoremi

Teorem 6.5.1. (İntegral Hesabın Temel Teoremi)

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $[a,b]$ aralığında f fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu (antitürevi) F olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dır.

Not 6.5.2.

$F(b) - F(a)$ ifadesi genel olarak

$$F(x)\,\Big|_a^b$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 6.5.3.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\int_a^b x^n dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek 6.5.4.

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Teorem 6.5.5.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon ve $a < c < b$ olsun. Bu durumda

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Longleftrightarrow f \in \mathcal{R}[a,c] \text{ ve } f \in \mathcal{R}[c,b]$$

olmasıdır ve böyle bir durumda

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

sağlanır.

Örnek 6.5.6.

$$\int_1^3 x^{[\![x]\!]} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Teorem 6.5.7.

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun.

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

olarak tanımlansın. Bu durumda F fonksiyonu $[a,b]$ aralığında süreklidir.

Sonuç 6.5.8.

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun.

$$G : [a,b] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

olarak tanımlansın. Bu durumda G fonksiyonu $[a,b]$ aralığında süreklidir.

Teorem 6.5.9.

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun.

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

olarak tanımlansın. Eğer f fonksiyonu bir $c \in [a,b]$ noktasında sürekli ise bu durumda F fonksiyonu bu c noktasında türevlenebilirdir ve

$$F'(c) = f(c)$$

sağlanır.

Sonuç 6.5.10.

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun.

$$G : [a,b] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$G(x) = \int_x^b f(t)\, dt$$

olarak tanımlansın. Eğer f fonksiyonu bir $c \in [a,b]$ noktasında sürekli ise bu durumda G fonksiyonu bu c noktasında türevlenebilirdir ve

$$G'(c) = -f(c)$$

sağlanır.

Sonuç 6.5.11.

$f \in \mathcal{C}[a,b]$ olsun.

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\forall x \in [a,b]$ için

$$F'(x) = f(x)$$

olur.

Not 6.5.12.

$f \in \mathcal{C}[a,b]$ olduğunda Sonuç 6.5.11 dikkate alınırsa

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

fonksiyonu f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında bir ilkel fonksiyonudur.

Sonuç 6.5.13.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ve $f \in \mathcal{C}\,[a,b]$ olsun. f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında herhangi bir ilkel fonksiyonu

$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \mathrm{C} \tag{6.11}$$

biçimindedir, burada $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ keyfi sayıdır.

Sonuç 6.5.14.

$f \in \mathcal{C}[a,b]$ ve f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında herhangi bir ilkel fonksiyonu $\mathcal{F}$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$$

olmalıdır.

Teorem 6.5.15. (Kısmi İntegrasyon Yöntemi)

$u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonlar ve $u', v' \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a) - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx \tag{6.13}$$

dir.

Not 6.5.16.

$$\begin{aligned} du(x) &= u'(x)\,dx \\ dv(x) &= v'(x)\,dx \end{aligned}$$

olduğuna göre (6.13) ifadesi

$$\int_a^b u dv = uv \mid_a^b - \int_a^b v du \tag{6.14}$$

biçiminde de yazılabilir. (6.13) ve (6.14) ifadelerinde verilen formüllere Riemann integrali için kısmi integrasyon formülü adı verilir.

Örnek 6.5.17.

$$\int_1^e \ln x \, dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Teorem 6.5.18. (Değişken Değiştirme Yöntemi)

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında türevlenebilir ve $\varphi' \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $I = \varphi([a,b])$ kümesinde sürekli ise bu durumda

$$\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx \tag{6.15}$$

dir.

Örnek 6.5.19.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Teorem 6.5.20. (İntegral İçin Ortalama Değer Teoremi)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ sayısı vardır.

Teorem 6.5.21. (İntegral İçin Genelleşmiş Ortalama Değer Teoremi)

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $g(x) \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx \tag{6.18}$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.