

# MAT 110 ANALİZ II

## Belirli İntegrallerin Uygulamaları

Ankara Üniversitesi

10. Hafta

## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.1. Kesit Yöntemi

#### Teorem 7.3.1.

$S \subset \mathbb{R}^3$  cismi  $[a, b]$  aralığı üzerine yerleştirilmiş bir katı cisim olmak üzere  $[a, b]$  aralığındaki her bir  $x$  noktasından  $Ox$  eksenine dik olarak çizilen düzlem  $P_x$  ve  $S$  cisminin  $P_x$  düzlemi içindeki kesitinin alanı  $A(x)$  olsun.  $A$  fonksiyonu  $x$  değişkeninin sürekli bir fonksiyonu ise bu durumda  $S$  cisminin  $V$  hacmi

$$V = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(t_k) \Delta x_k = \int_a^b A(x) dx$$

dir.

## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.1. Kesit Yöntemi

#### Örnek 7.3.2.

Yarıçapı  $r$  birim olan bir kürenin hacminin

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

olduğunu gösteriniz.

## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.2. Disk Yöntemi

#### Sonuç 7.3.3.

$y = f(x)$  eğrisi,  $x = a$ ,  $x = b$  doğruları ve  $Ox$  -ekseni arasında kalan bölgenin  $Ox$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin  $V$  hacmi

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

birim küptür.

#### Örnek 7.3.4.

$[0, 4]$  aralığında  $y = \sqrt{x}$  eğrisi ile  $x$  eksenini arasındaki bölge  $Ox$  -ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.2. Disk Yöntemi

#### Sonuç 7.3.5.

$x = u(y)$  eğrisi,  $y = c$ ,  $y = d$  doğruları ile  $Oy$  -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin  $Oy$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_c^d (u(y))^2 dy$$

birim küp olur.

#### Örnek 7.3.6.

$1 \leq y \leq 4$  olmak üzere  $x = \frac{2}{y}$  eğrisi ile  $y$  eksenini arasındaki bölge  $Oy$  -ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.2. Disk Yöntemi

#### Sonuç 7.3.7.

$[a, b]$  aralığında  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  olsun.  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  eğrileri,  $x = a$  ve  $x = b$  doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin  $Ox$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin  $V$  hacmi

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

birim küp olduğu kolayca gösterilebilir.

#### Örnek 7.3.8.

$y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = x^2$  eğrileri ile  $x = 1$  doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin  $Ox$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.2. Disk Yöntemi

#### Sonuç 7.3.9.

$[c, d]$  aralığında  $0 \leq v(y) \leq u(y)$  olsun.  $x = v(y)$ ,  $x = u(y)$  eğrileri,  $y = c$  ve  $y = d$  doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin  $Oy$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin  $V$  hacmi

$$V = \pi \int_c^d [u^2(y) - v^2(y)] dy$$

birim küp olduğu kolayca gösterilebilir.

#### Örnek 7.3.10.

Birinci bölgede  $y = x^2$  parabolü ve  $y = 2x$  doğrusu ile sınırlanan bölgenin  $Oy$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.3. Silindirik Kabuk Yöntemi

#### Teorem 7.3.11.

$0 \leq a < b$  ve  $\forall x \in [a, b]$  için  $f(x) \geq 0$  olmak üzere  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  doğruları ve  $y = f(x)$  eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin  $Oy$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen  $S$  dönel cisminin  $V$  hacmi

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

dir.

#### Örnek 7.3.12.

$y = \sqrt{x}$  eğrisi,  $x$  eksenini ve  $x = 4$  doğrusu tarafından sınırlı bölge  $Oy$  -ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.



## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.3. Silindirik Kabuk Yöntemi

#### Sonuç 7.3.13.

$0 \leq c < d$  ve  $\forall y \in [c, d]$  için  $u(y) \geq 0$  olmak üzere  $x = 0$ ,  $y = c$ ,  $y = d$  doğruları ve  $x = u(y)$  eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin  $Ox$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen  $S$  dönel cisminin hacmi

$$V = \int_c^d 2\pi y u(y) dy$$

dir.

## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.3. Silindirik Kabuk Yöntemi

#### Sonuç 7.3.14.

$0 \leq a < b$  ve  $\forall x \in [a, b]$  için  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  olmak üzere  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  eğrileri ile  $x = a$ ,  $x = b$  doğruları tarafından sınırlanan bölgenin  $Oy$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen  $S$  dönel cisminin hacmi

$$V = \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)] dx$$

dir.

## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.3. Silindirik Kabuk Yöntemi

#### Sonuç 7.3.15.

$0 \leq c < d$  ve  $\forall y \in [c, d]$  için  $0 \leq v(y) \leq u(y)$  olmak üzere  $x = u(y)$ ,  $x = v(y)$  eğrileri ile  $y = c$ ,  $y = d$  doğruları tarafından sınırlanan bölgenin  $Ox$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen  $S$  dönel cisminin hacmi

$$V = \int_c^d 2\pi y [u(y) - v(y)] dy$$

dir.

## 7.3. Hacim Hesabı

### 7.3.3. Silindirik Kabuk Yöntemi

#### Örnek 7.3.16.

$y = -x^2 + 4x - 3$  parabolü ile  $y = x - 3$  doğrusu arasında kalan bölge  $Oy$  -ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

#### Örnek 7.3.17.

$y = x^2 + 1$  eğrisi ile  $y = x + 3$  doğrusu arasında kalan bölgenin  $Ox$  -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

## 7.4. Eğri Uzunluğu Hesabı

### Teorem 7.4.1.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyon olsun.  $f'$  türev fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli ise bu durumda  $a \leq x \leq b$  olmak üzere  $y = f(x)$  denkleminin tanımladığı  $C$  eğrisinin  $l$  uzunluğu

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

dir.

## 7.4. Eğri Uzunluğu Hesabı

Örnek 7.4.2.

$a$  yarıçaplı bir çemberin uzunluğunu bulunuz.

Örnek 7.4.3.

$y = \ln x - \frac{x^2}{8}$  eğrisinin  $x = 2$  ve  $x = 4$  apsisli noktaları arasındaki parçasının uzunluğunu bulunuz.

## 7.4. Eğri Uzunluğu Hesabı

### Not 7.4.4.

Benzer şekilde,  $c \leq y \leq d$  olmak üzere  $x = u(y)$  denklemi ile verilen eğri parçasının uzunluğu

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (u'(y))^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

olarak hesaplandığı gösterilebilir.

### Örnek 7.4.5.

$x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}$  eğrisinin  $y = 1$  ve  $y = 2$  ordinatlı noktaları arasındaki parçasının uzunluğunu bulunuz.