MAT 110 ANALİZ II

Seriler

Ankara Üniversitesi

12. Hafta

Tanım 8.2.1.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisine negatif olmayan terimli seri adı verilir.

Teorem 8.2.2.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin (s_n) kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olmasıdır.

Örnek 8.2.3. (Harmonik Seri)

$\alpha > 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

serisi yakınsaktır. Gösteriniz.

Teorem 8.2.4. (Karşılaştırma Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

serilerini dikkate alalım. $k_0 \in \mathbb{N}$ ve $\forall k \geq k_0$ için

$$a_k \leq \lambda b_k$$

olacak şekilde $\lambda > 0$ sayısı mevcut olsun. Bu durumda

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi de yakınsaktır.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksak ise $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi de ıraksaktır.

Örnek 8.2.5. (Harmonik Seri)

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Sonuç 8.2.6. (Harmonik Seri)

Örnek 8.1.10, Örnek 8.2.3 ve Örnek 8.2.5 dikkate alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \sim \begin{cases} \text{Yakınsak} & ; \quad \alpha > 1 \\ \text{Iraksak} & ; \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

olduğu sonucu elde edilir.

Örnek 8.2.7.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k\,(k+1)}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Teorem 8.2.8. (Karşılaştırma Testinin Limit Formu)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$, $b_k > 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

serilerini dikkate alalım.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = L$$

ifadesi mevcut olsun. Bu durumda

(i) $0 < L < +\infty$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

serilerinin karakterleri aynıdır.

(ii) $L = 0$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

serisi yakınsak olduğunda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi de yakınsaktır.

(iii) $L = +\infty$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

serisi ıraksak olduğunda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi de ıraksaktır.

Sonuç 8.2.9. (Limit Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi verilsin ve

$$\lim_{k\to\infty} k^{\alpha} a_k = L$$

olsun.

(i) $0 \leq L < +\infty$ ve $\alpha > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.

(ii) $L > 0$ ve $\alpha \leq 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

Örnek 8.2.10.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k+1}}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Teorem 8.2.11. (D'Alembert Oran Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k > 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisini dikkate alalım.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r$$

olsun.

Bu durumda

(i)	$r < 1$	ise	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.
(ii)	$r > 1$	ise	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.
(iii)	$r = 1$	ise	şüpheli durum vardır, yani $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
serisinin	yakınsak	ya da	ıraksak olması üzerine kesin
birşey	söylenemez.		

Örnek 8.2.12.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Teorem 8.2.13. (Cauchy Kök Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisini dikkate alalım.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = r$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} (i) & r<1 & \text{ise} & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi yakınsaktır.} \\ (ii) & r>1 & \text{ise} & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi ıraksaktır.} \\ (iii) & r=1 & \text{ise} & \text{şüpheli durum vardır.} \end{array}$$

Not 8.2.14.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r$$

olduğunda

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = r$$

sağlanır.

O halde
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$$
olması durumunda
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$$
olacağından D'Alembert oran testinde seri için şüpheli durum çıkdığı takdirde Cauchy kök testinin uygulanması faydasızdır.

Örnek 8.2.15.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$$
serisinin karakterini inceleyiniz.

Teorem 8.2.16. (Raabe Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k > 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisini dikkate alalım.

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) = r$$

olsun. Bu durumda

(i) $r > 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.

(ii) $r < 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

Örnek 8.2.17.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...(2k)}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Teorem 8.2.18. (Logaritmik Test)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k > 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisini dikkate alalım.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_k}\right)}{\ln k} = L$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} (i) & L > 1 & \text{ise} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi yakınsaktır.} \\ (ii) & L \leq 1 & \text{ise} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi ıraksaktır.} \end{array}$$

Örnek 8.2.19.

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln k)]^{\ln k}}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Teorem 8.2.20. (Cauchy Benzerlik Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ ve $a_{k+1} \leq a_k$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisini dikkate alalım. Bu durumda

$$\text{"} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi yakınsak} \Longleftrightarrow \sum_{p=0}^{\infty} 2^p a_{2^p} \text{ serisi yakınsak"}$$

gerçeklenir.

Örnek 8.2.21.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.