MATEMATİK I

Fonksiyonlar

Ankara Üniversitesi

4. Hafta

Tanım 1.3.2.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $x\in\mathbb{R}$ için

$$f(x+T)=f(x)$$

olacak şekilde bir pozitif T reel sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T sayısına da f fonksiyonunun bir periyodu denir. T sayılarının bir en küçüğü varsa bu en küçük periyoda f fonksiyonunun esas periyodu denir.

Örnek 1.3.3.

$f(x) = x - [\![x]\!]$ fonksiyonu periyodik midir? Periyodik ise esas periyodunu bulunuz.

Örnek 1.3.4.

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu periyodik midir? Periyodik ise esas periyodunu bulunuz.

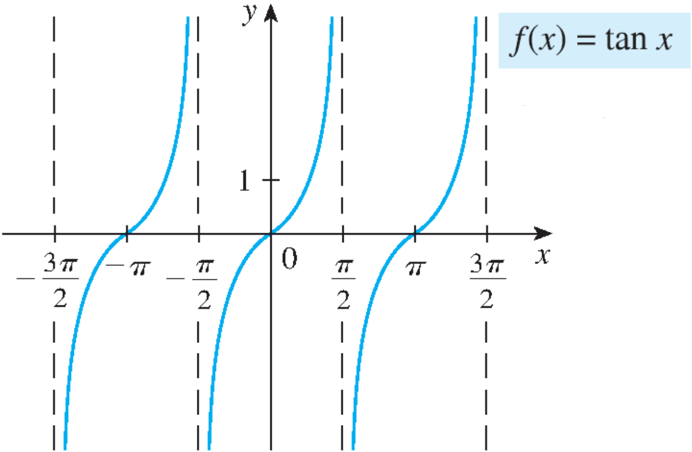
Tanjant fonksiyonu

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

şeklinde tanımlanmış olup bu fonksiyonun tanım kümesi

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

kümesidir. Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:


y
1
0
x
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
$f(x) = \tan x$

Yukardaki grafikten anlaşılacağı gibi tanjant fonksiyonu tek fonksiyon olup $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

aralığı üzerinde kesin artan fonksiyondur. Ayrıca bu fonksiyon periyodik fonksiyon olup esap periyodu π dir.

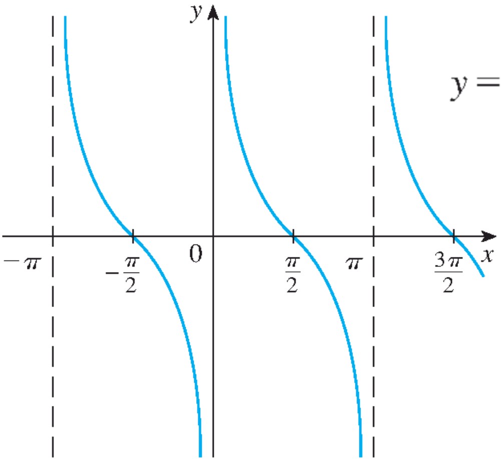
Kotanjant fonksiyonu

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

biçiminde tanımlanmış bu fonksiyonun tanım kümesi

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \backslash \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

şeklindedir. Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:


y
$y = \cot x$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
x

Yukardaki grafikten anlaşılacağı gibi kotanjant fonksiyonu tek fonksiyon olup $k \in \mathbb{Z}$ için

$$(k\pi, \pi + k\pi)$$

aralığı üzerinde kesin azalan fonksiyondur. Ayrıca bu fonksiyon periyodik fonksiyon olup esap periyodu π dir.

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

aralığında kesin olarak artan bir fonksiyon olduğundan bu aralıkta fonksiyon birebirdir. Sinüs fonksiyonu

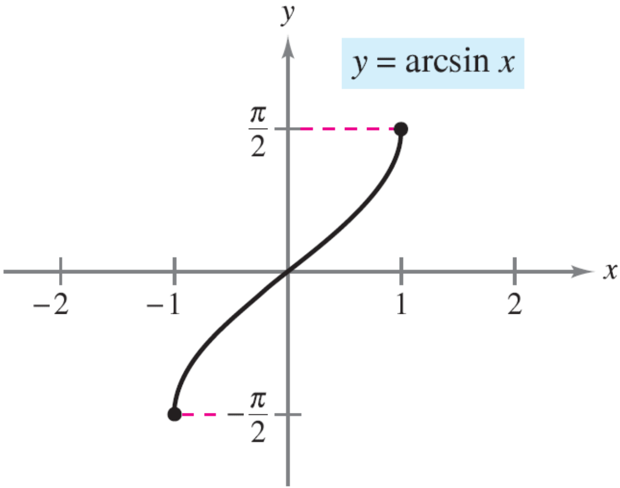
$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

olarak tanımlanırsa sinüs fonksiyonu birebir örten fonksiyon olur.

Dolayısıyla sinüs fonksiyonunun

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ile verilen tersi mevcuttur. Ters fonksiyonun grafiği esas fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından $f^{-1}(x) = \arcsin x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:


y
$y = \arcsin x$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
x
−2
−1
1
2

Grafikten de anlaşılacağı üzere $\arcsin x$ fonksiyonu tek fonksiyon olup tanım aralığı üzerinde, yani $[-1, 1]$ aralığında, kesin artan fonksiyondur.

Benzer şekilde $f(x) = \cos x$ fonksiyonu

$$[0, \pi]$$

aralığında kesin olarak azalan bir fonksiyon olduğundan bu aralıkta fonksiyon birebirdir. Kosinüs fonksiyonu

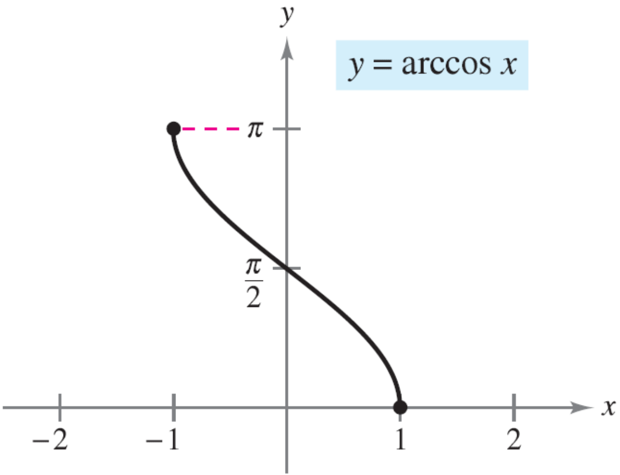
$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

olarak tanımlanırsa kosinüs fonksiyonu birebir örten fonksiyon olur.

Dolayısıyla kosinüs fonksiyonunun

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

ile verilen tersi mevcuttur. Ters fonksiyonun grafiği esas fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından $f^{-1}(x) = \arccos x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:


y
$y = \arccos x$
π
$\frac{\pi}{2}$
−2
−1
1
2
x

Grafikten de anlaşılacağı üzere $\arccos x$ fonksiyonu tanım aralığı üzerinde, yani $[-1, 1]$ aralığında, kesin azalan fonksiyondur.

Örnek 1.4.1.

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ve} \qquad \arccos 1$$

ifadelerini hesaplayınız.

$f(x) = \tan x$ fonksiyonu

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

aralığında kesin olarak artan bir fonksiyon olduğundan bu aralıkta fonksiyon birebirdir. Tanjant fonksiyonu

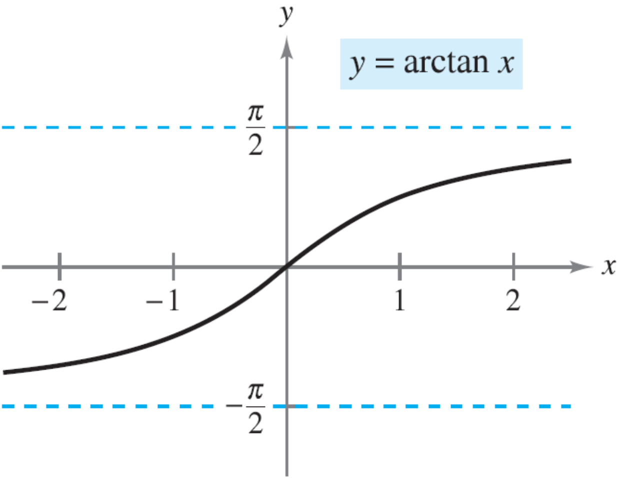
$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

olarak tanımlanırsa tanjant fonksiyonu birebir örten fonksiyon olur.

Dolayısıyla tanjant fonksiyonunun

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ile verilen tersi mevcuttur. Ters fonksiyonun grafiği esas fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından $f^{-1}(x) = \arctan x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:


y
$y = \arctan x$
$\frac{\pi}{2}$
-2
-1
1
2
x
$-\frac{\pi}{2}$

Grafikten de anlaşılacağı üzere $\arctan x$ fonksiyonu tek fonksiyon olup tanım aralığı üzerinde, yani $\mathbb{R}$ aralığında, kesin artan fonksiyondur.

$f(x) = \cot x$ fonksiyonu

$$(0, \pi)$$

aralığında kesin olarak azalan bir fonksiyon olduğundan bu aralıkta fonksiyon birebirdir. Kotanjant fonksiyonu

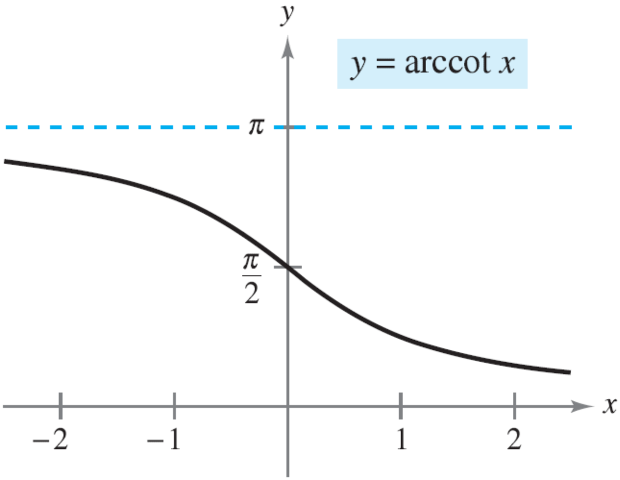
$$\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$$

olarak tanımlanırsa kotanjant fonksiyonu birebir örten fonksiyon olur.

Dolayısıyla kotanjant fonksiyonunun

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

ile verilen tersi mevcuttur. Ters fonksiyonun grafiği esas fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:


y
y = arccot x
π
π/2
x
−2
−1
1
2

Grafikten de anlaşılacağı üzere $\operatorname{arccot} x$ fonksiyonu tanım aralığı üzerinde, yani $\mathbb{R}$ aralığında, kesin azalan fonksiyondur.

Örnek 1.4.2.

$$\arctan\left(-\sqrt{3}\right) \quad \text{ve} \quad \operatorname{arccot}\left(\sqrt{3}\right)$$

ifadelerini hesaplayınız.

Tanım 1.5.1.

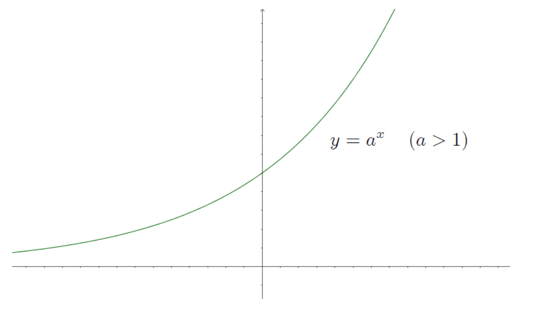
$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$$f(x) = a^x$$

biçiminde tanımlı f fonksiyonuna üstel fonksiyon adı verilir.

Not 1.5.2.

$a > 1$ olması durumunda üstel fonksiyon kesin olarak artan fonksiyondur. Bu durum için üstel fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:



Not 1.5.3.

$0 < a < 1$ olması durumunda ise üstel fonksiyon kesin olarak azalan fonksiyondur. Bu durum için üstel fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir: