MATEMATİK I

Limit ve Süreklilik

Ankara Üniversitesi

9. Hafta

Tanım 2.2.12.

Sonlu sayıda süreksizlik noktası olan fonksiyonlara parçalı sürekli fonksiyon adı verilir.

Örnek 2.2.13.

a, b ve c sabit sayılar olmak üzere f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \quad x \geq c \\ ax + b & ; \quad x < c \end{cases}$$

şeklinde tanımlanıyor. b ve c sayıları verildiğinde f fonksiyonunu $x = c$ noktasında sürekli yapan a değerini bulunuz.

Örnek 2.2.14.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ k & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olması için k sayısı ne olmalıdır.

Örnek 2.2.15.

Aşağıdaki $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının sürekli olup olmadığını araştırınız ve süreksiz iseler süreksizlik çeşidini belirleyiniz.

(i)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & ; \quad x\neq 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

(b)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2\sin x}{|x|} & ; \quad x\neq 0\\ 2 & ; \quad x=0\end{cases}$$

(c)

$$f(x)=\begin{cases}[\![x]\!]+[\![-x]\!] & ; \quad x\notin\mathbb{Z}\\ -1 & ; \quad x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Örnek 2.2.16.

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1-x}{2}\right) & ; \quad 0 < x < 3 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad x = 3 \\ \arctan\left(\frac{x}{3-x}\right) & ; \quad x > 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki süreklilik durumunu inceleyiniz.

Teorem 2.3.1. (Bolzano Teoremi)

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun.

$$f(a)\cdot f(b)<0$$

ise bu durumda

$$f(c)=0$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

Örnek 2.3.2.

$$x^3+x^2-1=0$$

denkleminin $(0,1)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

Teorem 2.3.3. (Ara Değer Teoremi)

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $A\neq B$ olmak üzere

$$f(a)=A \quad \text{ve} \quad f(b)=B$$

olsun. A ile B arasındaki her C sayısı için

$$f(c)=C$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

Not 2.3.4.

Bolzano teoremi ve Ara değer teoremi fonksiyonun $[a,b]$ aralığında sürekli olması halinde geçerlidir. Eğer fonksiyon $[a,b]$ aralığının bir uç noktasında bile süreksiz olsa bu teoremler geçersiz olur.

Örnek 2.3.5.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & ; \quad 0 \leq x \leq 3 \\ x-2 & ; \quad -3 \leq x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonun grafiğini çiziniz. f fonksiyonu $f(-3)$ ile $f(3)$ arasındaki her değeri alır mı?

$$f(c) = 0$$

olacak şekilde $c \in (-3,3)$ sayısı var mıdır?

Teorem 2.3.6.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise bu durumda sınırlıdır.

Tanım 2.3.7.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
(i) $c \in A$ olmak üzere

$$|x - c| < \delta$$

şartını sağlayan her $x \in A$ için

$$f(x) \leq f(c)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu c noktasında bir yerel maksimuma sahiptir denir.

(ii) $d \in A$ olmak üzere

$$|x - d| < \delta$$

şartını sağlayan her $x \in A$ için

$$f(x) \geq f(d)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu d noktasında bir yerel minimuma sahiptir denir. Fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum değerlerine, fonksiyonun ekstremumları veya ekstrem değerleri adı verilir.

(iii) Her $x \in A$ için

$$f(x) \leq f(p)$$

olacak şekilde bir $p \in A$ sayısı varsa f fonksiyonu p noktasında mutlak maksimuma sahiptir denir. $f(p)$ sayısına fonksiyonun en büyük değeri adı verilir.

(iv) Her $x \in A$ için

$$f(x) \geq f(r)$$

olacak şekilde bir $r \in A$ sayısı varsa f fonksiyonu r noktasında mutlak minimuma sahiptir denir. $f(r)$ sayısına fonksiyonun en küçük değeri adı verilir.

Teorem 2.3.8.

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve f fonksiyonu yerel ekstrem değerlerini (a,b) aralığının c_1, $c_2, ...,$ c_n noktalarında almış olsun.

$$f(a),\ f(c_1),\ f(c_2),...,\ f(c_n),\ f(b)$$

sayılarının en büyüğü fonksiyonun mutlak maksimum değeri, sayılarının en küçüğü fonksiyonun mutlak minimum değeridir.

Örnek 2.3.9.

$$f(x)=\begin{cases} -x & ; \quad -3\le x<-1 \\ x+2 & ; \quad -1\le x<0 \\ 2(x-1)^2 & ; \quad 0\le x\le 3 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun yerel ekstremum ve mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

Teorem 2.3.10.

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve kesin olarak artan fonksiyon olsun. $f(a) = c$ ve $f(b) = d$ ise
(1)

$$f : [a,b] \to [c,d]$$

fonksiyonunun f^{-1} tersi vardır.
(2) f^{-1} fonksiyonu $[c,d]$ aralığında kesin olarak artandır.
(3) f^{-1} fonksiyonu $[c,d]$ aralığında süreklidir.