MATEMATİK I

Türev

Ankara Üniversitesi

10. Hafta

Tanım 3.1.1.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralık ve

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyon olsun. $x, x_0 \in (a,b)$ olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A(x_0)$$

ifadesi sonlu sayı ise $A(x_0)$ sayısına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve

$$f'(x_0) \quad \text{veya} \quad Df(x_0) \quad \text{veya} \quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

ile gösterilir.

Bu durumda f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir ve

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3.1}$$

şeklindedir.

Not 3.1.2.

(3.1) ifadesinde $x = x_0 + h$ denirse

$$x \to x_0 \Longleftrightarrow h \to 0$$

olacağından

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Tanım 3.1.3.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu (a,b) aralığının her noktasında türevlenebilir ise $y = f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilirdir denir ve

$$f' \quad \text{veya} \quad \frac{df}{dx} \quad \text{veya} \quad \frac{dy}{dx}$$

ile gösterilir.

Not 3.1.4.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralık olmak üzere

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilir ise

$$f' : (a,b) \to \mathbb{R}$$

şeklinde bir fonksiyon elde edilir ve bu fonksiyona türev fonksiyonu adı verilir.

Tanım 3.1.5.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralık ve

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyon olsun. $x, x_0 \in (a,b)$ olmak üzere

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A\left(x_0^+\right)$$

ve

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A\left(x_0^-\right)$$

limitleri sonlu sayı ise $A\left(x_0^+\right)$ sayısına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sağ türevi, $A\left(x_0^-\right)$ sayısına f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sol türevi denir ve

$$f'\left(x_0^+\right) \quad \text{ve} \quad f'\left(x_0^-\right)$$

ile gösterilir.

Not 3.1.6.

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralık ve

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun x_0 noktasında sağ türevi ve sol türevi mevcut olsun. Bu durumda

$$f'\left(x_0^+\right) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{veya} \quad f'\left(x_0^+\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ve

$$f'\left(x_0^-\right) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{veya} \quad f'\left(x_0^-\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

olarak da ifade edilebilir.

Not 3.1.7.

Sağ limit ve sol limit ile ilgili teorem göz önüne alınırsa aşağıdaki sonucun doğru olduğu görülür.

Teorem 3.1.8.

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun bir x_0 noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$f'\left(x_0^+\right) = f'\left(x_0^-\right)$$

olmasıdır. Bu durumda

$$f'\left(x_0\right) = f'\left(x_0^+\right) = f'\left(x_0^-\right)$$

şeklindedir.

Not 3.1.9.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir, a noktasında sağdan türevlenebilir ve b noktasında soldan türevlenebilir ise f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında türevlenebilirdir denir.

Örnek 3.1.10.

$m, n \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = mx + n$$

olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f'(x) = m$$

dir. Gösteriniz.

Örnek 3.1.11.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = |x|$$

olsun. f fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında türevlenemezdir. Gösteriniz.

Teorem 3.1.12.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Örnek 3.1.13.

$n \in \mathbb{N}$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = x^n$$

kuralı ile tanımlı fonksiyon türevlenebilirdir ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

şeklindedir. Gösteriniz.

Teorem 3.2.1.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad \text{ve} \qquad g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonları bir $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevlenebilir ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olsun.

(i)

$$\lambda f + \mu g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu da x_0 noktasında türevlenebilirdir ve

$$(\lambda f + \mu g)' (x_0) = \lambda f' (x_0) + \mu g' (x_0)$$

şeklindedir.

(ii)

$$f.g:[a,b]\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu da x_0 noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f.g)'(x_0)=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0)$$

şeklindedir.
(iii) Her $x\in[a,b]$ için $g(x)\neq 0$ olmak üzere

$$\frac{f}{g}:[a,b]\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu da x_0 noktasında türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

şeklindedir.

(i) $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun türevini araştıralım:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos\ h + \sin\ h \cos x - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x (\cos\ h - 1) + \sin\ h \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos\ h - 1}{h} \sin x \right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin\ h}{h} \cos x \right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak yazılabilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos\ h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-2\sin^2\frac{h}{2}\right)-1}{h}\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\ h}{h}=1$$

olduğu (3.2) ifadesinde dikkate alınırsa

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$$

elde edilir. Yani; her $x\in\mathbb{R}$ için

$$(\sin x)'=\cos x$$

biçimindedir.

(ii) $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun türevinin, (i) ifadesindeki benzer işlemlerle, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(\cos x)' = -\sin x$$

olduğu görülür.

(iii) $f(x) = \tan x$ şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun türevi kesirli fonksiyonun türev formülünden her $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ için

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \, (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlanan

$$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun türevi, (iii) ifadesindeki benzer işlemlerle, her $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ için

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$$

olduğu görülür.