MATEMATİK I

Türev

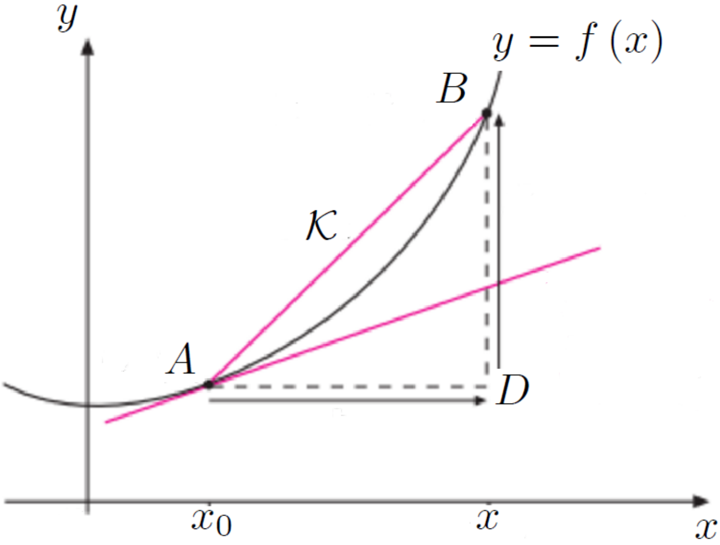
Ankara Üniversitesi

12. Hafta

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere $y = f(x)$ sürekli fonksiyonu ve $x, x_0 \in (a, b)$ sayıları verilmiş olsun. f fonksiyonunun $\mathcal{G}$ grafiği üzerindeki

$$A(x_0, f(x_0)) \quad \text{ve} \quad B(x, f(x))$$

noktalarından geçen $\mathcal{K}$ kirişini göz önüne alalım. B noktası f fonksiyonunun $\mathcal{G}$ grafiği üzerinde A noktasına yaklaştığında bu $\mathcal{K}$ kirişinin limit durumuna A noktasında $\mathcal{G}$ eğrisinin teğeti adı verilmektedir.


y
$y = f(x)$
B
K
A
D
x_0
x
x

Yukardaki şekilden görüldüğü gibi

$$\widehat{DAB} = \alpha\left(x_0; x\right)$$

olmak üzere $\mathcal{K}$ kirişinin eğimi

$$\tan\left(\alpha\left(x_0; x\right)\right) = \frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0}$$

biçiminde olacaktır.

f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir ise

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \tan(\alpha(x_0; x))$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $f'(x_0)$ sayısı A noktasında $\mathcal{G}$ eğrisine çizilen teğetin Ox -ekseniyle oluşturduğu açının tanjantıdır. Buna göre x_0 noktasında türevlenebilir $y = f(x)$ fonksiyonunun $A(x_0, f(x_0))$ noktasında teğet denklemi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 3.14.1.

$y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ eğrisine $A(1, -4)$ noktasında çizilen teğet denklemini bulunuz.

Teorem 3.15.1. (Fermat Teoremi)

$x_0 \in (a, b)$ noktası

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktası olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir ise

$$f'(x_0) = 0$$

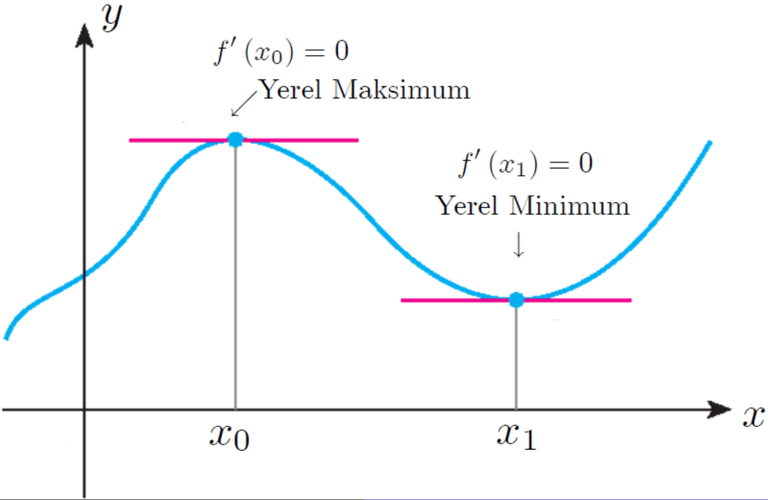
gerçeklenir.

Not 3.15.2.

Fermat teoreminin geometrik yorumu şöyledir:
$x_0 \in (a,b)$ noktasında türevlenebilen

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu x_0 noktasında yerel ekstremuma sahip olsun. Bu durumda $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ noktasında $y = f\left(x\right)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet x eksenine paralel olur.


y
$f'(x_0) = 0$
Yerel Maksimum
$f'(x_1) = 0$
Yerel Minimum
x
x_0
x_1

Not 3.15.3.

Fermat teoreminin karşıtı genel olarak doğru değildir. Örneğin;

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere $f(x) = x^3$ fonksiyonu için $f'(0) = 0$ olup fakat x_0 noktası f fonksiyonunun bir yerel ekstremum noktası değildir.

Not 3.15.4.

Bir fonksiyonun bir noktada lokal ekstremuma sahip olması fonksiyonun o noktada türevlenebilir olmasını gerektirmez. Örneğin;

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$

olmak üzere $f(x) = |x|$ fonksiyonu için $x_0 = 0$ yerel minimum noktasıdır ancak fonksiyon $x_0 = 0$ noktasında türevli değildir.

Tanım 3.15.5.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0\in(a,b)$ noktasında türevlenebilir ve

$$f'(x_0)=0$$

ise x_0 noktasına f fonksiyonunun duraklama noktası adı verilir.

Tanım 3.15.6.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyon ve $x_0\in(a,b)$ olsun. Eğer x_0 noktası f fonksiyonunun duraklama noktası ya da türevli olmadığı nokta ise x_0 noktasına f fonksiyonunun kritik noktası adı verilir.

Teorem 3.15.7. (Rolle Teoremi)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer,

$$f(a) = f(b)$$

ise

$$f'(x_0) = 0$$

olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.

Not 3.15.8.

Rolle teoreminin geometrik yorumu şöyledir:

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilir ve

$$f(a) = f(b)$$

olsun. Bu durumda öyle bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır öyle ki $(x_0, f(x_0))$ noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet x eksenine paraleldir.

Not 3.15.9.

Rolle teoreminin hipotezindeki koşulların kaldırılamayacağı gösterilebilir.

Not 3.15.10.

Rolle teoreminin cebirsel yorumu şöyledir.

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilir ve $f(a) = f(b) = 0$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun iki sıfır yeri arasında türev fonksiyonunun en az bir sıfır yeri vardır.

Örnek 3.15.11.

$$5x^4 - 4x + 1 = 0$$

denkleminin $(0,1)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

Teorem 3.15.12. (Ortalama Değer Teoremi)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır.

Not 3.15.13.

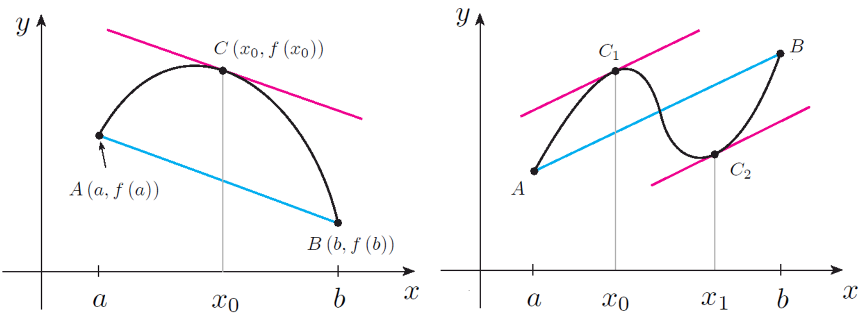
Ortalama değer teoreminin geometrik yorumu şöyledir:

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda öyle bir $x_0 \in (a,b)$ noktası vardır öyle ki

$$C\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$$

noktasında $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet $A\left(a, f\left(a\right)\right)$ ve $B\left(b, f\left(b\right)\right)$ noktalarından geçen doğruya paraleldir.


y
C (x0, f (x0))
A (a, f (a))
B (b, f (b))
a
x0
b
x
y
C1
B
A
C2
a
x0
x1
b
x

Örnek 3.15.14.

$x_1 < x_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leq x_2 - x_1$$

olduğunu gösteriniz.

Sonuç 3.15.15.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a)$$

olacak şekilde en az bir $\theta \in (0,1)$ sayısı vardır.

Sonuç 3.15.16.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda $x_1 < x_2$ olacak şekilde her $x_1, x_2 \in [a,b]$ sayıları için

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)$$

olacak şekilde en az bir $\theta \in (0,1)$ sayısı vardır.

Sonuç 3.15.17.

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda
(a) Her $x \in (a,b)$ için
$$f'(x) = 0$$
ise f fonksiyonu (a,b) aralığında sabit fonksiyondur.
(b) Her $x \in (a,b)$ için
$$f'(x) > 0$$
ise f fonksiyonu (a,b) aralığında artan fonksiyondur.

(c) Her $x \in (a,b)$ için

$$f'(x) \geq 0$$

ise f fonksiyonu (a,b) aralığında azalmayan fonksiyondur.
(d) Her $x \in (a,b)$ için

$$f'(x) < 0$$

ise f fonksiyonu (a,b) aralığında azalan fonksiyondur.
(e) Her $x \in (a,b)$ için

$$f'(x) \leq 0$$

ise f fonksiyonu (a,b) aralığında artmayan fonksiyondur.

Örnek 3.15.18.

$$f(x) = \operatorname{arccot} x - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sabit fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Örnek 3.15.19.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

fonksiyonunun monoton olduğu aralıkları bulunuz.

Teorem 3.15.20. (Cauchy Teoremi)

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(b) - g(a)]\, f'(x_0)$$

olacak şekilde en az bir $x_0 \in (a, b)$ noktası vardır.