MATEMATİK II

Belirsiz İntegraller

Ankara Üniversitesi

1. Hafta

Sonlu veya sonsuz bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığı ve I aralığında tanımlı

$$f, F : I \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu verilmiş olsun.

Tanım 1.1.1.

F fonksiyonu I üzerinde türevlenebilir ve $\forall x \in I$ için

$$F'(x) = f(x)$$

ise F fonksiyonuna f fonksiyonunun I aralığında ilkel fonksiyonu denir.

Örneğin;

Fonksiyon	**İlkel Fonksiyonu**	**Aralık**
$f_1(x) = x^3$	$F_1(x) = \frac{x^4}{4}$	$I = \mathbb{R}$
$f_2(x) = \cos x$	$F_2(x) = \sin x$	$I = \mathbb{R}$
$f_3(x) = \frac{1}{x}$	$F_3(x) = \ln x$	$I = (0, +\infty)$

Teorem 1.1.2.

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $F, G : I \to \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonları $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in I$ için

$$G(x) = F(x) + C$$

olmasıdır, burada $C \in \mathbb{R}$ keyfi sabittir.

Tanım 1.1.3.

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun tüm ilkel fonksiyonlarının kümesine f fonksiyonunun belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x)\,dx$$

sembolü ile gösterilir. $\int$ simgesine integral işareti, $f(x)$ ifadesine integrant ve x değişkenine de integrasyon değişkeni denir.

Eğer $F : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu ise Teorem 1.1.2 yardımıyla $C \in \mathbb{R}$ keyfi sabit olmak üzere

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

olur, burada C sabitine integrasyon sabiti adı verilir.

Şimdi belirsiz integrallerin aşağıdaki özelliklerini verelim:

(1)

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

sağlanır.

(2)

$$\int du(x) = u(x) + C$$

gerçeklenir.

(3) $\alpha, \beta \neq 0$ reel sayıları için

$$\int \left[\alpha f(x) \mp \beta g(x)\right] dx = \alpha \int f(x)\, dx \mp \beta \int g(x)\, dx$$

sağlanır.

Diferensiyel hesabında elemanter fonksiyonlarla ilgili gördüğümüz temel türev formülleri yardımıyla aşağıdaki integral formülleri yazılabilir:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad , \qquad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad , \qquad (x \neq 0)$$

$$\int a^{x} dx = \frac{1}{\ln a} a^{x} + C \quad , \qquad (a > 0, \ a \neq 1)$$

$$\int e^{x} dx = e^{x} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad , \quad \left(x \neq \frac{2n+1}{2}\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \quad , \quad (x \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C} \quad , \quad (-1 < x < 1)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + \tilde{C}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$$

Örnek 1.1.4.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \int \left(6x^2 - 4x + 3\right) dx \\
&(ii) \quad \int \left(2\sin x + 10\sqrt{x^3} + \frac{5}{x}\right) dx \\
&(iii) \quad \int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + 3e^x - \frac{2}{1+x^2}\right) dx \\
&(iv) \quad \int \left(x^3 + 3^x\right) dx
\end{aligned}
$$

φ sürekli türeve sahip bir fonksiyon olmak üzere

$$x = \varphi(t)$$

dönüşümü yapıldığında

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

olacağından

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

integrali bulunur. İntegral hesaplandıktan sonra $t = \varphi^{-1}(x)$ dönüşümü ile tekrar x değişkenine dönülür. Bu nedenle φ fonksiyonu tersi mevcut olan bir fonksiyon olmalıdır.

Örnek 1.2.1.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(i)\ \int (1-4x)^6\,dx \qquad (ii)\ \int \frac{(4+\ln x)^5}{x}dx$$

$$(iii)\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad (iv)\ \int \frac{x^4}{1+x^{10}}dx$$

$$(v)\ \int \frac{\sin x-\cos x}{\cos x+\sin x}dx \qquad (vi)\ \int \cos(ax)\,dx$$

(I) $\sqrt{a^2 - x^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralinde

$$x = a \sin t \qquad \Longrightarrow \qquad dx = a \cos t dt$$

değişken değiştirmesi yapılır.

(II) $\sqrt{x^2 - a^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralinde

$$x = a\frac{1}{\cos t} \qquad \Longrightarrow \qquad dx = a\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$

değişken değiştirmesi yapılır.

(III) $\sqrt{a^2+x^2}$ ifadesinden başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralinde

$$x = a\tan t \qquad \Longrightarrow \qquad dx = a\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

değişken değiştirmesi yapılır.

(IV) $\sqrt[n_i]{ax+b}$ biçiminde ifadeleri bulunduran fonksiyonların integralini hesaplamak için n_i kök kuvvetlerinin en küçük ortak katı p olmak üzere

$$ax + b = t^p \qquad \Longrightarrow adx = pt^{p-1}dt$$

değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek 1.2.2.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(i)\ \int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}dx \qquad (ii)\ \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}dx$$

$$(iii)\ \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} \qquad (iv)\ \int \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt[6]{x+1}}dx$$

(V) Trigonometrik fonksiyonların rasyonel ifadesi olan fonksiyonların integrasyonunda yarım açı yöntemi denilen

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

değişken değiştirmesi yapılır.

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \text{ve} \qquad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

olacağından

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

ve $\frac{x}{2}=\arctan t$ gerçeğinden

$$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

bulunur.

Örnek 1.2.3.

$$\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx$$

integralini hesaplayınız.

Teorem 1.2.4.

$I \subset \mathbb{R}$, $u, v : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonları I aralığında türevlenebilir ve $v(x) u'(x)$ fonksiyonunun I aralığında ilkel fonksiyonu mevcut olsun. Bu durumda $u(x) v'(x)$ fonksiyonun da I aralığında ilkel fonksiyonu mevcuttur ve

$$\int u(x) v'(x) \, dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) \, dx$$

veya

$$\int u dv = uv - \int v du$$

gerçeklenir. Bu eşitliklere kısmi integrasyon formülü denir.

Örnek 1.2.5.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$(i)\ \int xe^{3x}dx$ $(ii)\ \int x\sin 2x dx$

$(iii)\ \int \frac{x}{\cos^2 x}dx$ $(iv)\ \int x^5 \ln x dx$

$(v)\ \int e^{ax}\cos(bx)\,dx$