MATEMATİK II

Belirli İntegraller

Ankara Üniversitesi

3. Hafta

Tanım 2.1.1.

$[a, b]$ aralığı $a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b$ özelliğini sağlayan x_1, $x_2, ..., x_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölünsün. Uygunluğu sağlamak için a sayısı x_0, b sayısı da x_n ile gösterilsin.

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

kümesine $[a, b]$ aralığının bir parçalanması denir.

$$[x_0, x_1], \ [x_1, x_2], ..., \ [x_{n-1}, x_n]$$

aralıklarına $[a, b]$ aralığının $\mathcal{P}$ parçalanmasına karşılık gelen kapalı alt aralıkları,

$$(x_0, x_1), \ (x_1, x_2), ..., \ (x_{n-1}, x_n)$$

aralıklarına da açık alt aralıkları adı verilir.

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının boyu veya ölçüsü denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne $\mathcal{P}$ parçalanmasının normu denir ve $\|\mathcal{P}\|$ ile gösterilir. O halde

$$\|\mathcal{P}\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$$

dır. Eğer tüm alt aralıkların boyları birbirlerine eşit ise bu parçalanmaya düzgün parçalanma adı verilir.

Tanım 2.1.2.

$[a, b]$ aralığının iki parçalanması $\mathcal{P}_1$ ve $\mathcal{P}_2$ olsun. Eğer $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ ise $\mathcal{P}_2$ parçalanması $\mathcal{P}_1$ parçalanmasından daha ince veya daha sıktır denir.

Örnek 2.1.3.

$[1,2]$ aralığının

$$\mathcal{P}_1 = \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}_2 = \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\right\}$$

olsun. Bu iki parçalanmayı ve parçalanmaların normlarını karşılaştırınız.

Not 2.1.4.

Bir $[a,b]$ aralığının $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, ..., \mathcal{P}_r$ parçalanmaları için

$$\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset ... \subset \mathcal{P}_r \Longrightarrow \|\mathcal{P}_1\| \geq \|\mathcal{P}_2\| \geq ... \geq \|\mathcal{P}_r\|$$

olacağı açıktır. Yani parçalanma inceldikçe normu küçülür. $\|\mathcal{P}\|$ ifadesinin sıfıra yaklaşması demek, her bir alt aralığın boyunun sıfıra yaklaşması ve dolayısıyla alt aralıkların sayısı olan n sayısının sınırsız olarak büyümesi, yani $+\infty$ değerine yaklaşması demektir. Ancak bu ifadenin karşıtı doğru değildir. Eğer $\mathcal{P}$ parçalanması düzgün ise bu takdirde

$$\|\mathcal{P}\| \to 0 \Longleftrightarrow n \to \infty$$

önermesi doğrudur.

Tanım 2.1.5.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $[a, b]$ aralığının parçalanması için

$$\begin{aligned} M_k &= \max \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \} \\ m_k &= \min \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \} \end{aligned}$$

olsun.

$$A(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \quad \text{ve} \quad \ddot{U}(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

toplamlarına sırası ile f fonksiyonunun $\mathcal{P}$ parçalanmasına karşılık gelen alt toplamı ve üst toplamı adı verilir. $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ herhangi bir nokta olmak üzere

$$\mathcal{R}(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x_k$$

toplamına f fonksiyonunun $\mathcal{P}$ parçalanmasına karşılık gelen bir Riemann toplamı denir.

Not 2.1.6.

Riemann toplamı x_k^* noktalarına bağlıdır. Her $\mathcal{P}$ parçalanması için

$$A(f,\mathcal{P}) \leq \mathcal{R}(f,\mathcal{P}) \leq \ddot{U}(f,\mathcal{P})$$

olacağı açıktır. Kolayca gösterilebileceği gibi parçalanma inceldikçe alt toplamlar artar, üst toplamlar azalır. Bazı fonksiyonlar için üst ve alt toplamlar farkı sıfıra yaklaşır. Bu durumda $\ddot{U}(f,\mathcal{P})$, $A(f,\mathcal{P})$ ve $\mathcal{R}(f,\mathcal{P})$ ifadeleri aynı bir I sayısına yaklaşır.

Tanım 2.1.7.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. Eğer

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \Delta x_k = I$$

limiti mevcut ise bu limite f fonksiyonunun a -dan b -ye kadar integrali denir ve

$$\int_a^b f(x)\, dx = I$$

ile gösterilir. Bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir denir.

Örnek 2.1.8.

$$\int_0^1 x dx$$

integralini hesaplayınız.

Teorem 2.1.9.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $\epsilon > 0$ için

$$\ddot{U}(f, \mathcal{P}) - A(f, \mathcal{P}) < \epsilon$$

olacak şekilde $[a, b]$ aralığının bir $\mathcal{P}$ parçalanmasının var olmasıdır (Riemann Şartı).