

MATEMATİK II

Belirli İntegrallerin Uygulamaları

Ankara Üniversitesi

7. Hafta

3.2. Alan Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Teorem 3.2.1.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

dir.

Örnek 3.2.2.

$y = x^2$ eğrisi, $x = 3$, $x = 6$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

3.2. Alan Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Sonuç 3.2.3.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq 0$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

dir.

Örnek 3.2.4.

Dördüncü bölgede, $y = x^3 - 3x$ eğrisi ile Ox -ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

3.2. Alan Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Sonuç 3.2.5.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, $c \in (a, b)$ olmak üzere $\forall x \in [a, c]$ için $f(x) \geq 0$ ve $\forall x \in [c, b]$ için $f(x) \leq 0$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^c f(x) dx + \left(- \int_c^b f(x) dx \right)$$

dir.

3.2. Alan Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Not 3.2.6.

Yukarıdaki tüm alan formüllerinin hepsi tek bir formülle

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

biçiminde ifade edilebilir.

Örnek 3.2.7.

$y = x^2 - 4x + 3$ eğrisi, $x = 2$, $x = 4$ doğruları ve Ox -ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

3.2. Alan Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Sonuç 3.2.8.

$u : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[c, d]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda $x = u(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve Oy -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = \int_c^d |u(y)| dy$$

olacaktır.

Örnek 3.2.9.

$y = x^3$ eğrisi, $y = 1$, $y = 8$ doğruları ve Oy -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

3.2. Alan Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Teorem 3.2.10.

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq g(x)$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

dir.

3.2. Alan Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Sonuç 3.2.11.

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $g(x) \geq f(x)$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

dir.

Örnek 3.2.12.

$y = x^2 + 2$, $y = 2x - x^2$ parabolleri ile Oy -ekseni ve $x = 3$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

3.2. Alan Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Sonuç 3.2.13.

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli, $c \in (a, b)$ olmak üzere $\forall x \in [a, c]$ için $f(x) \geq g(x)$ ve $\forall x \in [c, b]$ için $g(x) \geq f(x)$ olsun. Bu durumda $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$$

dir.

Örnek 3.2.14.

$y = 3x - x^3$ eğrisiyle $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

3.2. Alan Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Not 3.2.15.

$[a, b]$ aralığında sürekli olan f ile g fonksiyonlarının durumları ne olursa olsun, $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

olacaktır.

3.2. Alan Hesabı

3.2.1. Kartezyen Koordinatlarda Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Sonuç 3.2.16.

$h, k : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[c, d]$ aralığında sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $x = h(y)$, $x = k(y)$ eğrileri ile $y = c$ ve $y = d$ doğruları arasında kalan A bölgesinin alanı

$$A = \int_c^d |h(y) - k(y)| dy$$

olacaktır.

Örnek 3.2.17.

$x = 2y$ doğrusuyla $x = 8 - y^2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

3.2. Alan Hesabı

3.2.2. Parametrik Denklemleri Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Teorem 3.2.18.

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen C eğrisini dikkate alalım. Bu durumda C eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t) dt$$

olur, burada a ve b sayılarına karşılık gelen değerler, sırası ile, t_1 ve t_2 dir.

3.2. Alan Hesabı

3.2.2. Parametrik Denklemleri Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Teorem 3.2.19.

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemi ile verilen C eğrisini dikkate alalım. Bu durumda C eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve Oy -ekseni tarafından sınırlanan A bölgesinin alanı

$$A = \int_{t_3}^{t_4} |g(t)| h'(t) dt$$

olur, burada c ve d sayılarına karşılık gelen değerler, sırası ile, t_3 ve t_4 dür.

3.2. Alan Hesabı

3.2.2. Parametrik Denklemleri Verilen Eğriler için Alan Hesabı

Örnek 3.2.20.

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

parametrik denklemleri verilen elipsin alanını bulunuz.