MATEMATİK II

Belirli İntegrallerin Uygulamaları

Ankara Üniversitesi

8. Hafta

Teorem 3.3.1.

$S \subset \mathbb{R}^3$ cismi $[a, b]$ aralığı üzerine yerleştirilmiş bir katı cisim olmak üzere $[a, b]$ aralığındaki herbir x noktasından Ox eksenine dik olarak çizilen düzlem P_x ve S cisminin P_x düzlemi içindeki kesitinin alanı $A(x)$ olsun. A fonksiyonu x değişkeninin sürekli bir fonksiyonu ise bu durumda S cisminin V hacmi

$$V = \lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} A(t_k)\, \Delta x_k = \int_a^b A(x)\, dx$$

dir.

Örnek 3.3.2.

Yarıçapı r birim olan bir kürenin hacminin

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

olduğunu gösteriniz.

Sonuç 3.3.3.

$y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox -ekseni arasında kalan bölgenin Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin V hacmi

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

birim küptür.

Örnek 3.3.4.

$[0, 4]$ aralığında $y = \sqrt{x}$ eğrisi ile x ekseni arasındaki bölge Ox -ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

Sonuç 3.3.5.

$x = u(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ile Oy -ekseni tarafından sınırlanan bölgenin Oy -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_c^d (u(y))^2 \, dy$$

birim küp olur.

Örnek 3.3.6.

$1 \leq y \leq 4$ olmak üzere $x = \frac{2}{y}$ eğrisi ile y ekseni arasındaki bölge Oy -ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

Sonuç 3.3.7.

$[a,b]$ aralığında $0 \leq g(x) \leq f(x)$ olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri, $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin V hacmi

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx$$

birim küp olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 3.3.8.

$y = 2\sqrt{x}$, $y = x^2$ eğrileri ile $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Sonuç 3.3.9.

$[c,d]$ aralığında $0 \leq v(y) \leq u(y)$ olsun. $x = v(y)$, $x = u(y)$ eğrileri, $y = c$ ve $y = d$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Oy -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin V hacmi

$$V = \pi \int_c^d \left[u^2(y) - v^2(y) \right] dy$$

birim küp olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 3.3.10.

Birinci bölgede $y = x^2$ parabolü ve $y = 2x$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin Oy -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Teorem 3.3.11.

$0 \leq a < b$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ olmak üzere $y = 0$, $x = a$, $x = b$ doğruları ve $y = f(x)$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin Oy -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen S dönel cisminin V hacmi

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

dir.

Örnek 3.3.12.

$y = \sqrt{x}$ eğrisi, x ekseni ve $x = 4$ doğrusu tarafından sınırlı bölge Oy -ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

Sonuç 3.3.13.

$0 \leq c < d$ ve $\forall y \in [c,d]$ için $u(y) \geq 0$ olmak üzere $x = 0$, $y = c$, $y = d$ doğruları ve $x = u(y)$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen S dönel cisminin hacmi

$$V = \int_c^d 2\pi y u(y)\, dy$$

dir.

Sonuç 3.3.14.

$0 \leq a < b$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $0 \leq g(x) \leq f(x)$ olmak üzere $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin Oy -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen S dönel cisminin hacmi

$$V = \int_a^b 2\pi x \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

dir.

Sonuç 3.3.15.

$0 \leq c < d$ ve $\forall y \in [c, d]$ için $0 \leq v(y) \leq u(y)$ olmak üzere $x = u(y)$, $x = v(y)$ eğrileri ile $y = c$, $y = d$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen S dönel cisminin hacmi

$$V = \int_c^d 2\pi y \left[u(y) - v(y)\right] dy$$

dir.

Örnek 3.3.16.

$y = -x^2 + 4x - 3$ parabolü ile $y = x - 3$ doğrusu arasında kalan bölge Oy -ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

Örnek 3.3.17.

$y = x^2 + 1$ eğrisi ile $y = x + 3$ doğrusu arasında kalan bölgenin Ox -ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Teorem 3.4.1.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. f' türev fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise bu durumda $a \leq x \leq b$ olmak üzere $y = f(x)$ denkleminin tanımladığı C eğrisinin l uzunluğu

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

dir.

Örnek 3.4.2.

a yarıçaplı bir çemberin uzunluğunu bulunuz.

Örnek 3.4.3.

$y = \ln x - \frac{x^2}{8}$ eğrisinin $x = 2$ ve $x = 4$ apsisli noktaları arasındaki parçasının uzunluğunu bulunuz.

Not 3.4.4.

Benzer şekilde, $c \leq y \leq d$ olmak üzere $x = u(y)$ denklemi ile verilen eğri parçasının uzunluğu

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (u'(y))^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

olarak hesaplandığı gösterilebilir.

Örnek 3.4.5.

$x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}$ eğrisinin $y = 1$ ve $y = 2$ ordinatlı noktaları arasındaki parçasının uzunluğunu bulunuz.