MATEMATİK II

Genelleştirilmiş İntegraller

Ankara Üniversitesi

9. Hafta

Tanım 4.1.1.

$a \in \mathbb{R}$ ve $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a < b$ koşulunu sağlayan her $b \in \mathbb{R}$ sayısı için $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx \tag{4.1}$$

değerine f fonksiyonunun $[a, +\infty)$ aralığındaki birinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir ve

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

ile gösterilir.

4.1. Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegral Kavramı

Eğer (4.1) ifadesindeki limit var ve sonlu ise

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

integrali yakınsak, (4.1) ifadesinde limit yoksa ya da $-\infty$ ya da $+\infty$ ise

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

integrali ıraksaktır denir.

Örnek 4.1.2.

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Örnek 4.1.3.

$a > 0$ için

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$$

integralinin karakterini inceleyiniz.

Not 4.1.4.

$a > 0$ için

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \backsim \begin{cases} Yakınsak & ; \quad p > 1 \\ Iraksak & ; \quad p \leq 1 \end{cases}$$

dır.

Örnek 4.1.5.

$$\int_0^{+\infty} x^2 dx$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

4.1. Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegral Kavramı

Tanım 4.1.6.

$b \in \mathbb{R}$ ve $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a < b$ koşulunu sağlayan her $a \in \mathbb{R}$ sayısı için $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx \tag{4.2}$$

değerine f fonksiyonunun $(-\infty, b]$ aralığındaki birinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir ve

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

ile gösterilir.

4.1. Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegral Kavramı

Eğer (4.2) ifadesindeki limit var ve sonlu ise

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

integrali yakınsak, (4.2) ifadesinde limit yoksa ya da $-\infty$ ya da $+\infty$ ise

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

integrali ıraksaktır denir.

Örnek 4.1.7.

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Tanım 4.1.8.

$f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a < b$ koşulunu sağlayan her $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları için $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{\substack{t_1 \to -\infty \\ t_2 \to +\infty}} \int_{t_1}^{t_2} f(x)\, dx \tag{4.3}$$

değerine f fonksiyonunun $(-\infty, +\infty)$ aralığında birinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

ile gösterilir.

4.1. Birinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegral Kavramı

Eğer (4.3) ifadesindeki limit var ve sonlu ise

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

integrali yakınsak, (4.3) ifadesinde limit yoksa ya da $-\infty$ ya da $+\infty$ ise

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

integrali ıraksaktır denir.

Not 4.1.9.

$f:(-\infty,+\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $a<b$ koşulunu sağlayan her $a,b\in\mathbb{R}$ sayıları için $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Keyfi $c\in\mathbb{R}$ için

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad \text{ve} \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

genelleştirilmiş integrallerin her ikisi de yakınsak ise

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

genelleştirilmiş integrali yakınsaktır denir ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

dir.

Örnek 4.1.10.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Tanım 4.2.1.

$a, B \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : [a, B) \to \mathbb{R}$$

fonksiyon, herbir $b \in [a, B)$ için $[a, b]$ aralığında f fonksiyonu integrallenebilir ve

$$\lim_{x \to B^-} f(x) = \pm\infty$$

olsun.

$$\int_a^B f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{B-\epsilon} f(x)\,dx \tag{4.4}$$

ifadesine f fonksiyonunun $[a, B)$ aralığındaki ikinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir.

4.2. İkinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegral Kavramı

Eğer (4.4) ifadesindeki limit var ve sonlu ise

$$\int_a^B f(x)\,dx$$

integrali yakınsaktır, (4.4) ifadesindeki limit yoksa ya da $-\infty$ ya da $+\infty$ ise

$$\int_a^B f(x)\,dx$$

integrali ıraksaktır denir.

Örnek 4.2.2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Tanım 4.2.3.

$A, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : (A, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyon ve herbir $a \in (A, b]$ için $[a, b]$ aralığında f fonksiyonu integrallenebilir ve

$$\lim_{x \to A^+} f(x) = \pm\infty$$

olsun.

$$\int_A^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{A+\epsilon}^b f(x)\,dx \tag{4.5}$$

ifadesine f fonksiyonunun $(A, b]$ aralığındaki ikinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir.

Eğer (4.5) ifadesindeki limit var ve sonlu ise

$$\int_A^b f(x)\,dx$$

integrali yakınsaktır, (4.5) ifadesindeki limit yoksa ya da $-\infty$ ya da $+\infty$ ise

$$\int_A^b f(x)\,dx$$

integrali ıraksaktır denir.

Örnek 4.2.4.

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2}dx$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Yakınsak ise yakınsadığı değeri bulunuz.

Not 4.2.5.

$$\int_a^B \frac{dx}{(B-x)^p} \backsim \begin{cases} Yakınsak & ; \quad p<1 \\ Iraksak & ; \quad p\geq 1 \end{cases}$$

ve

$$\int_A^b \frac{dx}{(x-A)^p} \backsim \begin{cases} Yakınsak & ; \quad p<1 \\ Iraksak & ; \quad p\geq 1 \end{cases}$$

oldukları kolaylıkla gösterilebilir.

Not 4.2.6.

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ve $C \in (a, b)$ olmak üzere

$$f : [a, b] \setminus \{C\} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu herbir $c' \in [a, C)$ ve $c'' \in (C, b]$ için $[a, c']$ ve $[c'', b]$ aralıkları üzerinde integrallenebilir ve

$$\lim_{x \to C} f(x) = \mp\infty$$

olsun.

Bu durumda f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki ikinci çeşit genelleştirilmiş integrali

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^C f(x)\,dx + \int_C^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^{C-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{C+\epsilon}^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 4.2.7.

$$\int_0^{\pi} \tan x dx$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Not 4.2.8.

$A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : (A, B) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $[a, b] \subset (A, B)$ aralığında integrallenebilir ve

$$\lim_{x \to A^+} f(x) = \mp\infty \text{ ve } \lim_{x \to B^-} f(x) = \mp\infty$$

olsun.

Bu durumda f fonksiyonunun (A, B) aralığındaki ikinci çeşit genelleştirilmiş integrali

$$\begin{aligned}\int_A^B f(x)\,dx &= \int_A^c f(x)\,dx + \int_c^B f(x)\,dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{A+\epsilon}^c f(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_c^{B-\epsilon} f(x)\,dx\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 4.2.9.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2} dx$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Tanım 4.2.10.

Bir integral hem birinci çeşit genelleştirilmiş integralin hem de ikinci çeşit genelleştirilmiş integralin özelliklerini sahipse, yani fonksiyon hem sınırsız bir aralık üzerinde tanımlı hem de bu aralığın en az bir noktası komşuluğunda sınırsız ise bu integrale üçüncü çeşit genelleştirilmiş integral adı verilir.

Örnek 4.2.11.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.