

# MATEMATİK II

## Genelleştirilmiş İntegraller

Ankara Üniversitesi

10. Hafta

### Teorem 4.3.1. (Karşılaştırma Testi)

$$f, g : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

fonksiyonları  $[a, +\infty)$  aralığında sürekli ve  $x \in [a, +\infty)$  için

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

olsun. Bu durumda

(i)  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  integrali yakınsak ise  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integrali de yakınsaktır.

(ii)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integrali ıraksak ise  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  integrali de ıraksaktır.

### Örnek 4.3.2.

Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

$$(a) \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$(b) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \ln x}$$

### Teorem 4.3.3. (Karşılaştırma Testinin Limit Formu)

$$f : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

fonksiyonu  $[a, +\infty)$  aralığında sürekli ve

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = L$$

olsun. Bu durumda

- (i)  $0 \leq L < +\infty$  ve  $p > 1$  ise  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integrali yakınsaktır.
- (ii)  $0 < L \leq +\infty$  ve  $p \leq 1$  ise  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  integrali ıraksaktır.

### Örnek 4.3.4.

Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

$$(a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{9x^4 + 1}}$$

$$(b) \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^2} dx$$

### Not 4.3.5.

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \quad (4.6)$$

şeklindeki bir integralin yakınsaklık durumunu incelerken ilk olarak  $x = -t$  değişken değiştirmesi yapılır ve

$$\int_{-a}^{+\infty} f(-t) dt \quad (4.7)$$

integrali elde edilir. Daha sonra (4.7) ifadesindeki integralin karakteri Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.3 de verilen testler yardımıyla incelenir.

Örnek 4.3.6.

$$\int_{-\infty}^0 x^5 e^{-x} dx$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

## 4.4. İkinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller İçin Yakınsaklık Testleri

### Teorem 4.4.1.

$$f, g : [a, B) \rightarrow [0, +\infty)$$

fonksiyonları her  $[a, b] \subset [a, B)$  aralığında sürekli,

$$\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = +\infty$$

ve her  $x \in [a, B)$  için

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

olsun. Bu durumda

(i)  $\int_a^B g(x) dx$  integrali yakınsak ise  $\int_a^B f(x) dx$  integrali de yakınsaktır.

(ii)  $\int_a^B f(x) dx$  integrali ıraksak ise  $\int_a^B g(x) dx$  integrali de ıraksaktır.



## 4.4. İkinci Çeşit Genelleştirilmiş İntegraller İçin Yakınsaklık Testleri

### Not 4.4.2.

$f$  fonksiyonunun singüler noktasının aralığın sol uç noktası veya aralığın bir iç noktası olması durumunda da benzer test verilebilir.

### Örnek 4.4.3.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}$$

integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

### Teorem 4.4.4. (Karşılaştırma Testinin Limit Formu)

$$f : [a, B) \rightarrow [0, +\infty)$$

fonksiyonu her  $[a, b] \subset [a, B)$  aralığında sürekli,

$$\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = +\infty$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow B^-} (B - x)^p f(x) = L$$

olsun. Bu durumda

- (i)  $0 \leq L < +\infty$  ve  $p < 1$  ise  $\int_a^B f(x) dx$  integrali yakınsaktır.
- (ii)  $0 < L \leq +\infty$  ve  $p \geq 1$  ise  $\int_a^B f(x) dx$  integrali ıraksaktır.

### Not 4.4.5.

$$f : (A, b] \rightarrow [0, +\infty)$$

fonksiyonu her  $[a, b] \subset (A, b]$  aralığında sürekli ve

$$\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = +\infty$$

olması durumunda

$$\lim_{x \rightarrow A^+} (x - A)^p f(x) = L$$

ifadesini dikkate alarak benzer test verilebilir.

### Örnek 4.4.6.

Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^3} dx$$