MATEMATİK II

Diziler ve Seriler

Ankara Üniversitesi

11. Hafta

Tanım 5.1.1.

Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan her f fonksiyonuna dizi adı verilir. O halde bir dizi

$$f : \mathbb{N} \to X$$

şeklinde bir dönüşüm olarak düşünülebilir ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f : \underset{n}{\mathbb{N}} \underset{\to}{\to} \underset{x_n = f(n) \in X}{X}$$

olarak yazılabilir. $x_n \in X$ elemanına dizinin genel terimi (veya n -inci terimi) adı verilir ve bu dizi kısaca (x_n) ile gösterilir. $X \subset \mathbb{R}$ olması durumunda (x_n) dizisine reel sayı dizisi adı verilir.

Tanım 5.1.2.

(x_n) reel sayı dizisi olsun.
(a) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \leq b$$

olacak şekilde $b \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_n) dizisi üstten sınırlıdır denir. b sayısına da (x_n) dizisinin bir üst sınırı denir.
(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a \leq x_n$$

olacak şekilde $a \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_n) dizisi alttan sınırlıdır denir. a sayısına da (x_n) dizisinin bir alt sınırı denir.
(c) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a \leq x_n \leq b$$

olacak şekilde $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları varsa (x_n) dizisi sınırlıdır denir.

Örnek 5.1.3.

(a) $(x_n) = (n)$ dizisi için $0 < x_n$ olduğundan (x_n) dizisi alttan sınırlıdır. Ancak üstten sınırlı değildir.
(b) $(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < x_n = \frac{n}{n+1} < 1$$

olduğundan (x_n) dizisi sınırlı bir dizidir.
(c) $(x_n) = \left((-1)^n\right)$ dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$-1 \leq x_n = (-1)^n \leq 1$$

olduğundan (x_n) dizisi sınırlı bir dizidir.

Tanım 5.1.4.

(x_n) reel sayı dizisi olsun.
(a) Her $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < x_{n+1}$$

ise (x_n) dizisine artan dizi denir.
(b) Her $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \leq x_{n+1}$$

ise (x_n) dizisine azalmayan dizi denir.

(c) Her $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} < x_n$$

ise (x_n) dizisine azalan dizi denir.
(d) Her $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} \leq x_n$$

ise (x_n) dizisine artmayan dizi denir.

Tanım 5.1.5.

(x_n) reel sayı dizisi yukarıda belirtilen tipteki dizilerden biri ise (x_n) dizisine monoton dizi adı verilir.

Örnek 5.1.6.

$$(x_n) = \left(\frac{3}{n+5}\right)$$

dizisi azalandır. Gösteriniz.

Örnek 5.1.7.

$$(x_n) = \left(\frac{n}{n^2+1}\right)$$

dizisi azalandır. Gösteriniz.

Tanım 5.1.8.

(x_n) reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Keyfi $\epsilon > 0$ sayısı için en az bir $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı var öyle ki $n > n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$|x_n - a| < \epsilon$$

sağlanıyor ise (x_n) dizisi a sayısına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{veya} \qquad x_n \to a \quad (n \in \mathbb{N})$$

biçiminde gösterilir. Yakınsak olmayan diziye ıraksak dizi denir.

Örnek 5.1.9.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 5.1.10.

$$x_n=(-1)^n$$

genel terimine sahip (x_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Teorem 5.1.11.

$\mathbb{R}$ reel sayılar içinde yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır.

Teorem 5.1.12.

$\mathbb{R}$ reel sayılar içinde yakınsak her dizi sınırlıdır.

Not 5.1.13.

Teorem 5.1.12 de ifade edilen önermenin karşıtı doğru değildir. Gerçekten

$$(x_n) = ((-1)^n)$$

dizisini dikkate alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x_n| = \left|(-1)^n\right| = 1$$

olduğundan (x_n) dizisi sınırlıdır. Ancak bu (x_n) dizisi yakınsak değildir.

Tanım 5.1.14.

(x_n) reel sayı dizisi olsun.
(a) Eğer her $M \in \mathbb{R}$ sayısı için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var öyle ki $n > n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n > M$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa (x_n) dizisinin limiti $+\infty$ dur denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{veya} \quad x_n \to +\infty \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir.

(b) Eğer her $M \in \mathbb{R}$ sayısı için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var öyle ki $n > n_0$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n < M$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa (x_n) dizisinin limiti $-\infty$ dur denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{veya} \quad x_n \to -\infty \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 5.1.15.

(x_n) ve (y_n) reel sayı dizisi olsun.

$$(x_n + y_n)\,,\;\; (x_n - y_n)\,,\;\; (x_n \cdot y_n)$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq 0$ olduğunda

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$$

dizilerine sırasıyla (x_n) ve (y_n) dizilerinin toplamı, farkı, çarpımı ve bölümü denir.

Teorem 5.1.16.

(x_n), (y_n) reel sayı dizileri yakınsak ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ , \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

olsun. Bu durumda
(i) $(x_n + y_n)$ dizisi de yakınsak olup

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$$

dir.

(ii) $(x_n - y_n)$ dizisi de yakınsak olup

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$$

dir.
(iii) $(x_n \cdot y_n)$ dizisi de yakınsak olup

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = ab$$

dir.

Not 5.1.17.

Teorem 5.1.16 da ifade edilen önermelerin karşıtı doğru değildir. Gerçekten

$$(x_n) = ((-1)^n) \quad \text{ve} \quad (y_n) = \left((-1)^{n-1}\right)$$

dizilerini dikkate alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} x_n + y_n &= (-1)^n + (-1)^{n-1} = 0 \\ x_n \cdot y_n &= (-1)^n . (-1)^{n-1} = -1 \end{aligned}$$

olup $(x_n + y_n)$ ve $(x_n \cdot y_n)$ dizileri yakınsaktır ancak (x_n) ve (y_n) dizileri yakınsak değildir.

Teorem 5.1.18.

(x_n), (y_n) reel sayı dizileri yakınsak ve her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ , \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b \quad (b \neq 0)$$

ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

dir.

Not 5.1.19.

Teorem 5.1.18 de ifade edilen önermenin karşıtı doğru değildir. Gerçekten

$$(x_n) = \left((-1)^n\right) \quad \text{ve} \quad (y_n) = \left((-1)^{n-1}\right)$$

dizilerini dikkate alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}} = -1$$

olup $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dizisi yakınsaktır ancak (x_n) ve (y_n) dizileri yakınsak değildir.

Örnek 5.1.20.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \qquad\qquad (b)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{10+n}}$$

$$(c)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3} \qquad\qquad (d)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+5n+6}$$

Örnek 5.1.21.

$$x_n = \frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3}$$

genel terimli (x_n) dizisinin limitini bulunuz.

Teorem 5.1.22.

(x_n), (y_n) ve (z_n) reel sayı dizileri olmak üzere her $n > n_0$ için

$$x_n \leq z_n \leq y_n$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

ise bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a$$

dır.

Örnek 5.1.23.

$$x_n = \frac{1}{n}\sin\left(n^2+3\right)$$

genel terimi ile verilen (x_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Örnek 5.1.24.

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

genel terimine sahip (x_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Teorem 5.1.25.

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

sağlanır.

Örnek 5.1.26.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

ifadesini hesaplayınız.

Teorem 5.1.27.

(x_n) reel sayı dizisi ve f fonksiyonu her x_n noktasında tanımlı olsun. Eğer

$$x_n \to a$$

ve f fonksiyonu a noktasında sürekli bir fonksiyon ise bu durumda

$$f(x_n) \to f(a)$$

sağlanır.

Örnek 5.1.28.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 5.1.29.

$$\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Teorem 5.1.30.

$n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x \geq n_0$ koşulunu sağlayan her x için f fonksiyonu tanımlı ve $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = f(n)$$

olarak tanımlı reel sayı dizisi (x_n) olsun. Eğer

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

ise bu durumda

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

gerçeklenir.

Örnek 5.1.31.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \qquad (b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} \qquad (c)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

Örnek 5.1.32.

$$x_n = r^n$$

genel terimine sahip (x_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Not 5.1.33.

$(x_n) = (r^n)$ dizisi $-1 < r \leq 1$ için yakınsaktır ve

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 < r < 1 \\ 1 & ; \quad r = 1 \end{cases}$$

gerçeklenir. r sayısının diğer değerleri için $(x_n) = (r^n)$ dizisi ıraksaktır.

Örnek 5.1.34.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Teorem 5.1.35.

(x_n) reel sayı dizisi olsun.
(i) (x_n) dizisi monoton artan ve üstten sınırlı dizi ise bu durumda (x_n) dizisi yakınsaktır.
(ii) (x_n) dizisi monoton azalan ve alttan sınırlı dizi ise bu durumda (x_n) dizisi yakınsaktır.

Örnek 5.1.36.

$$x_n = \frac{2^n}{n!}$$

genel terimine sahip (x_n) dizisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.