MATEMATİK II

Diziler ve Seriler

Ankara Üniversitesi

12. Hafta

Tanım 5.2.1.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

sembolüne sonsuz toplam ya da seri adı verilir.

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sayılarına serinin terimleri adı verilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin kısmi toplamları

$s_1 =$	a_1	$(1.\ Kısmi\ Toplam)$
$s_2 =$	$a_1 + a_2$	$(2.\ Kısmi\ Toplam)$
$s_3 =$	$a_1 + a_2 + a_3$	$(3.\ Kısmi\ Toplam)$
...	...	...
$s_n =$	$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$	$(n.\ Kısmi\ Toplam)$

olarak tanımlansın.

Tanım 5.2.2.

(a_k) reel sayı dizisi için

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

olmak üzere (s_n) dizisine

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin kısmi toplamlar dizisi adı verilir.

Tanım 5.2.3.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi ve bu serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Eğer (s_n) dizisi yakınsak, yani

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R},$$

ise bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi yakınsaktır denir

ve

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = s \quad \text{ya da} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

olarak yazılır. Eğer (s_n) dizisi ıraksak ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi ıraksaktır denir.

Örnek 5.2.4. (Geometrik Seri)

$|r| < 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = \frac{1}{1-r}$$

olduğunu gösteriniz.

Sonuç 5.2.5.

Yukarıdaki örnek göz önüne alındığında geometrik seriler için aşağıdaki

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} \sim \begin{cases} \text{Yakınsak} & ; \quad |r| < 1 \\ \text{Iraksak} & ; \quad |r| \geq 1 \end{cases}$$

ifade yazılabilir.

Örnek 5.2.6.

Aşağıdaki serilerin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise serilerin yakınsadığı değeri (serilerin toplamını) bulunuz.

$$(a)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} \qquad (b)\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\pi^k} \qquad (c)\quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot 3^{2k}\cdot 2^{-k}$$

Örnek 5.2.7.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

serisinin karakterini inceleyiniz. Yakınsak ise serinin yakınsadığı değeri (serinin toplamını) bulunuz.

Örnek 5.2.8.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Teorem 5.2.9.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi yakınsak} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

dır.

Sonuç 5.2.10. (Iraksaklık Kriteri)

$$\lim_{k\to\infty} a_k$$

mevcut değil ya da

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$$

ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi ıraksaktır.

Örnek 5.2.11.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2}{k^2+1}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Örnek 5.2.12.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2k^2+k+1}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Teorem 5.2.13.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin (s_n) kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olmasıdır.

Teorem 5.2.14. (İntegral Testi)

$f : [1, +\infty) \to (0, \infty)$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ aralığında sürekli, azalan ve pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$a_k = f(k)$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

integralinin yakınsak olmasıdır.

Örnek 5.2.15.

$\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + ... + \frac{1}{n^{\alpha}} + ...$$

serisinin $\alpha > 1$ için yakınsak, $\alpha \leq 1$ için ıraksak olduğunu gösteriniz.

Sonuç 5.2.16. (Harmonik Seri)

Örnek 5.2.15 dikkate alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \sim \begin{cases} \text{Yakınsak} & ; \quad \alpha > 1 \\ \text{Iraksak} & ; \quad \alpha \leq 1 \end{cases}$$

olduğu sonucu elde edilir.

Not 5.2.17.

Teorem 5.2.9 da verilen önermenin karşıtı doğru değildir. Yani; eğer

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi yakınsak olmayabilir.

Örneğin;

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

olmasına rağmen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

serisi ıraksaktır.

Tanım 5.2.18.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$K_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

ifadesine

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin kalan terimi denir.

Teorem 5.2.19.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi yakınsak olsun. Bu durumda bu serinin kalan teriminin limiti sıfırdır, yani

$$\lim_{n\to\infty} K_n = 0$$

dır.

Teorem 5.2.20.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

serileri yakınsak olsun. Bu durumda
(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$$

serileri de yakınsaktır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \mp b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mp \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

gerçeklenir.

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$$

serisi de yakınsaktır ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

gerçeklenir.

Tanım 5.2.21.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisine negatif olmayan terimli seri adı verilir.

Teorem 5.2.22. (Karşılaştırma Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

serilerini dikkate alalım. $k_0 \in \mathbb{N}$ ve $\forall k \geq k_0$ için

$$a_k \leq \lambda b_k$$

olacak şekilde $\lambda > 0$ sayısı mevcut olsun. Bu durumda

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi de yakınsaktır.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksak ise $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi de ıraksaktır.

Örnek 5.2.23. (Harmonik Seri)

$0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Örnek 5.2.24.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k\,(k+1)}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Örnek 5.2.25.

Aşağıdaki serilerin karakterini inceleyiniz.

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{2^k} \qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{2k^2+4k+3} \qquad (c) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$$

Teorem 5.2.26. (Limit Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi verilsin ve

$$\lim_{k\to\infty} k^{\alpha} a_k = L$$

olsun.

$$(i) \quad 0 \leq L < +\infty \text{ ve } \alpha > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi yakınsaktır.}$$

$$(ii) \quad L > 0 \text{ ve } \alpha \leq 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi ıraksaktır.}$$

Örnek 5.2.27.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k+1}}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Örnek 5.2.28.

Aşağıdaki serilerin karakterini inceleyiniz.

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2+2k+1} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k-1} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k\ln k}{k^2+5}$$

Teorem 5.2.29. (D'Alembert Oran Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k > 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisini dikkate alalım.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r$$

olsun.

Bu durumda

(i)	$r<1$	ise	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.
(ii)	$r>1$	ise	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.
(iii)	$r=1$	ise	şüpheli durum vardır, yani $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

serisinin yakınsak ya da ıraksak olması üzerine kesin birşey söylenemez.

Örnek 5.2.30.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Örnek 5.2.31.

Aşağıdaki serilerin karakterini inceleyiniz.

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 5}{3^k} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k! \cdot k!}$$

Teorem 5.2.32. (Cauchy Kök Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisini dikkate alalım.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = r$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} (i) & r < 1 & \text{ise} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi yakınsaktır.} \\ (ii) & r > 1 & \text{ise} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \text{ serisi ıraksaktır.} \\ (iii) & r = 1 & \text{ise} & \text{şüpheli durum vardır.} \end{array}$$

Not 5.2.33.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r$$

olduğunda

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = r$$

sağlanır.

O halde

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$$

olması durumunda

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$$

olacağından D'Alembert oran testinde seri için şüpheli durum çıkdığı takdirde Cauchy kök testinin uygulanması faydasızdır.

Örnek 5.2.34.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Örnek 5.2.35.

Aşağıdaki serilerin karakterini inceleyiniz.

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} \qquad\qquad (b) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+k}\right)^{k}$$

Tanım 5.2.36.

Terimlerinin işareti ardışık olarak değişen serilere alterne seri adı verilir.
Aşağıdaki seriler

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - ... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{k}{k+1}$$

alterne serilere örnek olarak verilebilir.

Teorem 5.2.37. (Leibniz Testi)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + ...$$

serisi için

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall k \in \mathbb{N} \text{ için } 0 < b_{k+1} \leq b_k \\ (ii) & \lim\limits_{k \to \infty} b_k = 0 \end{array}$$

ise bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$$

serisi yakınsaktır.

Örnek 5.2.38.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Tanım 5.2.39.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

serisi yakınsak ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisine mutlak yakınsak seri adı verilir.

Örnek 5.2.40.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

serisinin mutlak yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Tanım 5.2.41.

(a_k) reel sayı dizisi olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi yakınsak fakat

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

serisi ıraksak ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisine şartlı yakınsaktır denir.

Örnek 5.2.42.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

serisinin şartlı yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Teorem 5.2.43.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

serisi yakınsak ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi de yakınsaktır.

Örnek 5.2.44.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^2}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.

Teorem 5.2.45. (D'Alembert Oran Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisini dikkate alalım.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = r$$

olsun. Bu durumda

(i) $r < 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.

(ii) $r > 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

(iii) $r = 1$ ise şüpheli durum vardır.

Teorem 5.2.46. (Cauchy Kök Testi)

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $a_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisini dikkate alalım.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = r$$

olsun. Bu durumda

(i) $\quad r < 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır.

(ii) $\quad r > 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

(iii) $\quad r = 1$ ise şüpheli durum vardır.

Örnek 5.2.47.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3}{3^k}$$

serisinin karakterini inceleyiniz.