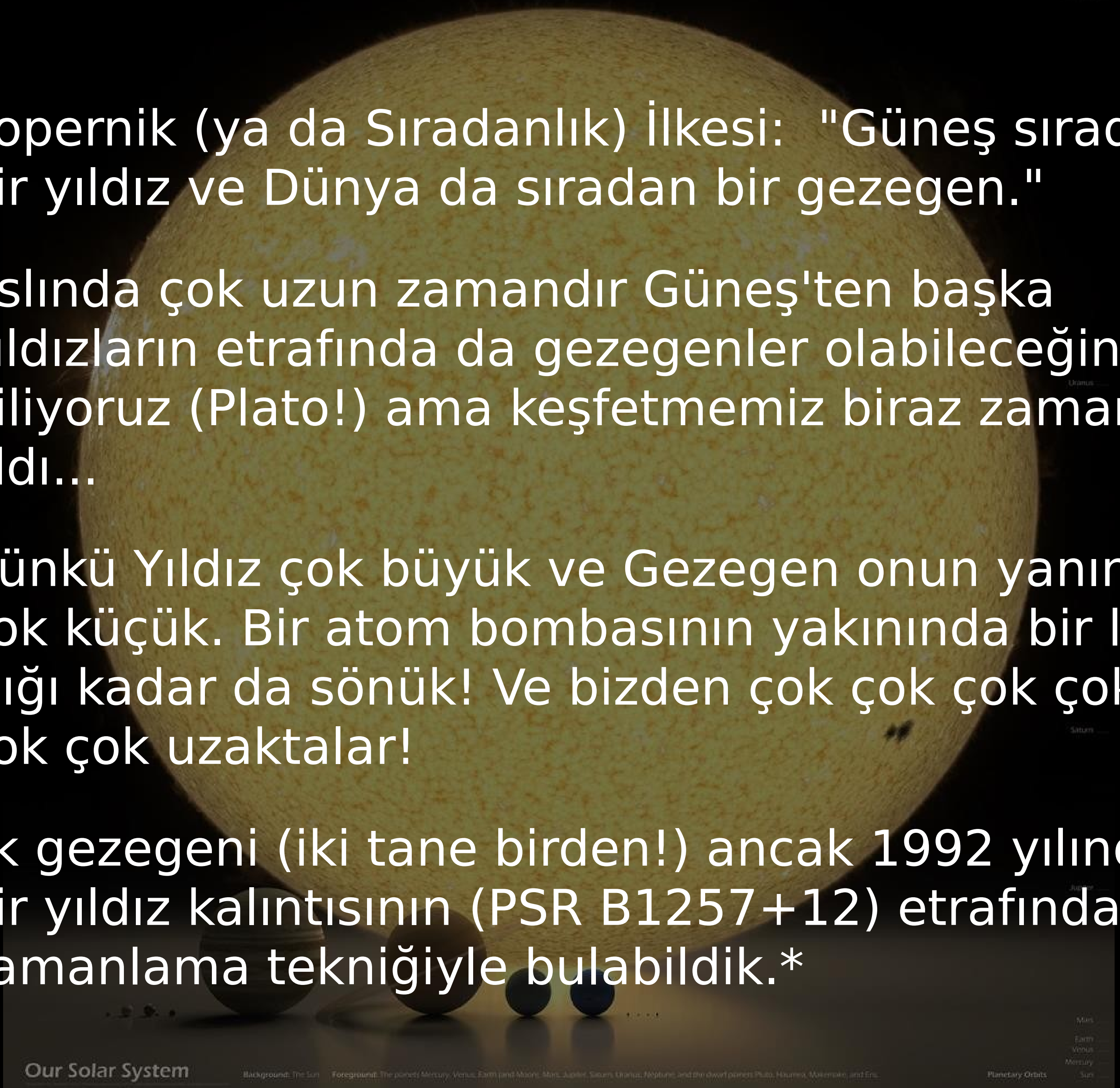
AST413 Gezegen Sistemleri ve Oluşumu

Ders 1 : Tarihçe ve Temel Yasalar



- Kopernik (ya da Sıradanlık) İlkesi: "Güneş sıradan bir yıldız ve Dünya da sıradan bir gezegen."
- Aslında çok uzun zamandır Güneş'ten başka yıldızların etrafında da gezegenler olabileceğini biliyoruz (Plato!) ama keşfetmemiz biraz zaman aldı...
- Çünkü Yıldız çok büyük ve Gezegen onun yanında çok küçük. Bir atom bombasının yakınında bir lazer ışığı kadar da sönük! Ve bizden çok çok çok çok çok çok uzaktalar!
- İlk gezegeni (iki tane birden!) ancak 1992 yılında bir yıldız kalıntısının (PSR B1257+12) etrafında zamanlama tekniğiyle bulabildik.*

PSR-B1257+12 Sistemi *	
Keşif	1992 - 1994
d*	1630 ly
P_{rot}	6.22 ms
$M_{b,c,d}$	0.00007, 0.013, 0.012 $M_{jüp}$
$P_{b,c,d}$	25, 66, 98 gün
b,c,d	0.19, 0.36, 0.46 AB

Tüm veriler http://exoplanet.eu adresinden alınmıştır

NASA/JPL-Caltech/R. Hurt (SSC)

- ✔ Güneş benzeri bir yıldız etrafında ilk gezegen (51 Peg b)* dikine hız tekniğiyle keşfedildi.

- ✔ Yıldızının önünden geçerken "farkedilen" ilk gezegenler: HD209458b (Osiris)** ve OGLE-TR-56b***

- ✔ Bugün itibarı ile 3060 sistemde toplam 4113**** gezegen keşfetmiş durumdayız ve daha binlerce de aday cisim var!

- ✔ Üstelik Merkür büyüklüğündeki gezegenlerden, süper Dünyalar ve mini Neptünlere varana dek büyük bir ötegezegen çeşitliliğiyle de karşı karşıyayız!

* Mayor & Queloz (1995)
** Charbonneau vd. (2000)
*** Konacki vd. (2003)
**** 20 Eylül 2019

- Dünya benzeri gezegenler bulmayı umuyorduk ama ilk bulduğumuz gezegenler daha çok Jüpiter’e benziyordu!
- Yıldızının burnunun dibinde dolanan Jüpiter’in birkaç katı kütleye sahip dev gaz gezegenler!
- Bu gezegenler hala kafamızı karıştırıyor. Biz gezegen sistemlerinin nasıl oluştuğunu biliyor ama Dünya benzeri gezegenler olup olmadığını merak ediyorduk.
- Şimdi ikincisinin var olduğunu bulduk ama birincisinden emin değiliz!

Ötegezegen Türleri

Bilimde sınıflandırma her zaman önemli bir problemdir. Bunun temel nedeni doğada “cetvelle çizilmiş” net sınırların bulunmamasıdır. Yeni bir alt bilim alanı olan ötegezegen biliminde de gezegen türlerine ilişkin sınıflar henüz yeni yeni oluşturulmakta ve farklı gruplar benzer gezegenleri farklı sınıf isimleri altında inceleyebilmektedir. Literatürde sıkça kullanılan ötegezegen tüleri:

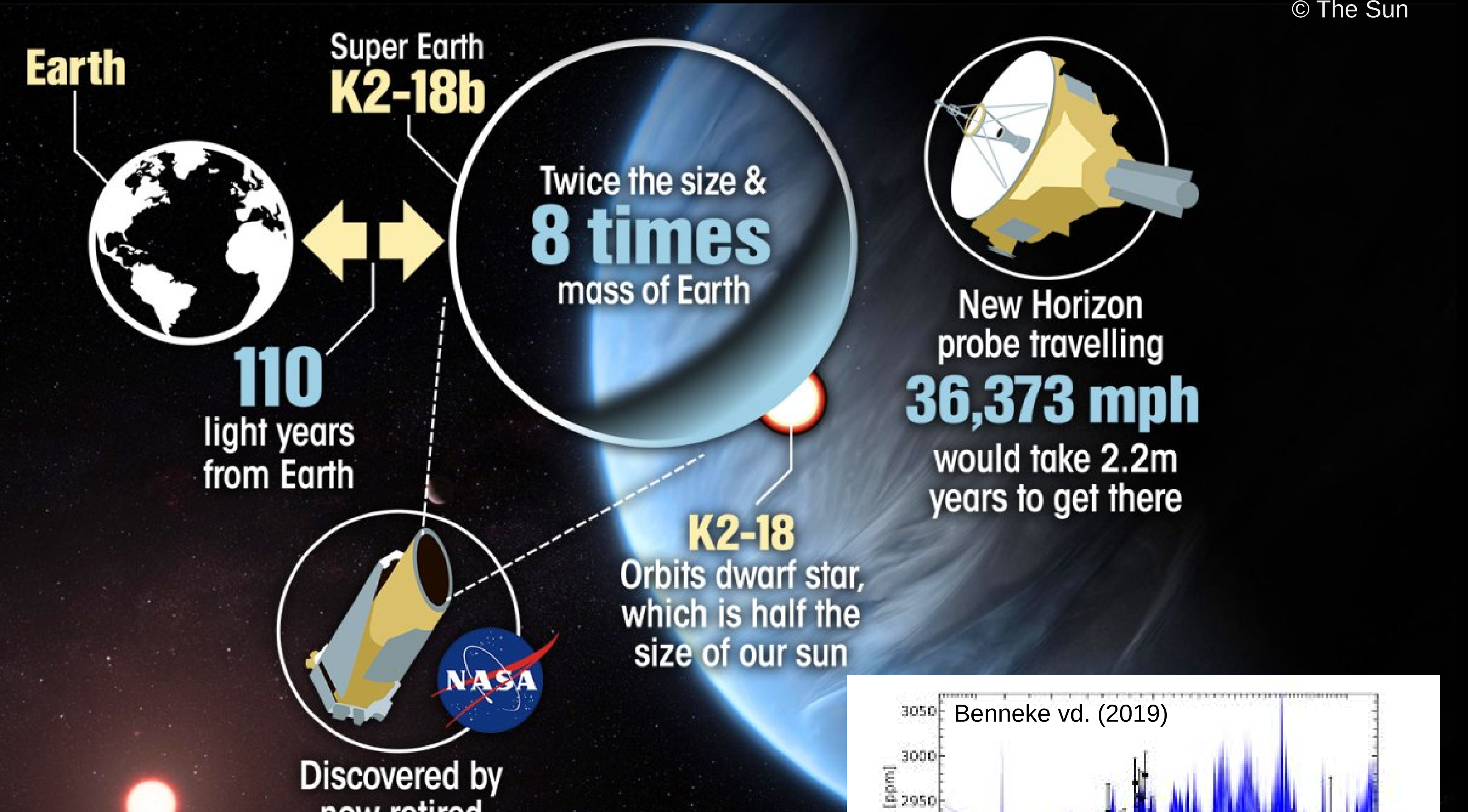
- ✔ Dünya Benzeri (ing. Earth-like, Earth analog): Yaklaşık Dünya kütlesinde ($0.8\ M_{yer} < M_{gez.} < 1.2\ M_{Yer}$) karasal gezegenlerdir.
- ✔ Gaz Devi (ing. Gas Giant): Büyük ölçüde hidrojen ve helyumdan oluşan büyük yarıçaplı gezegenlerdir (örn. Jüpiter, Satürn).
- ✔ Buz Devi (ing. Ice Giant): Yıldızına uzaklığı nedeniyle genellikle gaz formunda gözlenen materyali (metan gibi) buz formuna dönüşmüş gezegenlerdir (örn. Uranüs, Neptün)
- ✔ Sıcak Jüpiter (ing. Hot Jupiter): Yıldızına yakın (0.015-0.5 AB) ve bu nedenle sıcak, kısa yörünge dönemli dev gaz gezegenlerdir (örn. 51 Peg b).
- ✔ Sıcak Neptün (ing. Hot Neptune): Yıldızına yakın (< 1 AB) ve bu nedenle sıcak, Uranüs-Neptün büyüklüğündeki gaz gezegenlerdir (örn. Gliese 436 b).

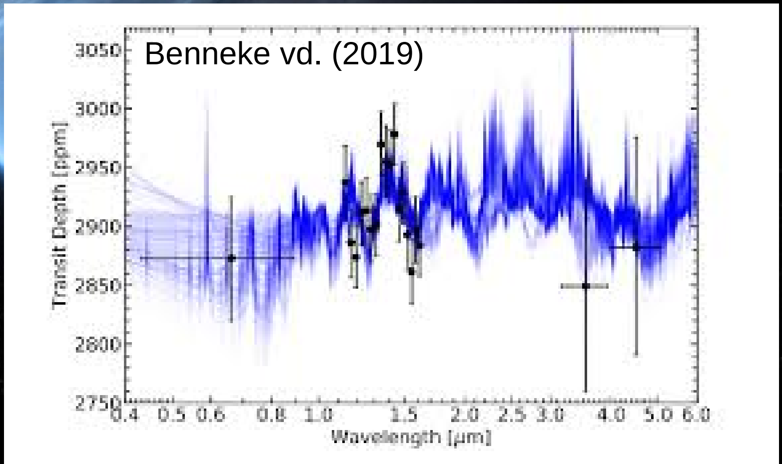
Ötegezegen Türleri

- Mini Neptün (ing. Mini Neptune): Karasal gezegenlerle gaz devleri arasında, (5 – 10 M_{yer}) kütleli geçiş cisimleridir. Hidrojen ve Helyumca zengin atmosfereler; buz, kaya yüzeylere hatta sıvı okyanuslara sahip yüzeyleri olabilecekleri düşünülmektedir (örn. GJ 1214b).
  - Gazca Zengin Neptün-altı gezegenler (Gas Rich sub-Neptunes): Muhtemelen çok küçük çekirdeklerinin üstünde hidrojen ve helyumca zengin atmosferleri olan alt türdür. Yapıları nedeni ile mini-Jüpiter olarak da bilinirler.
- Süper Dünya (ing. Super Earth): 2 – 5 M_{Yer} kütleli karasal olmaları beklenen gezegenlerdir (örn. PSR B1257+12 b, Gliesse 876 d).
- Serbest Gezegenler (ing. Free Floating, Nomad, Rogue, Interstellar, Starless, Orphan Planets): Herhangi bir yıldızın etrafında dolanmayan ancak gezegen kütle limitleri dahilindeki cisimlerdir. Bu cisimlere gezegen tanımının bir yıldızla ortak kütle merkezi etrafında hareket eden cisimleri kapsadığını düşünen araştırmacılar kahverengi cüce altı (ing. Sub-brown dwarf) cisimler de demektedirler (örn. PSO J318.5-22, SDSS J111010.01 + 011613.1).
- “Şişkin” gezegenler (super-puffs): Çok düşük yoğunluğa sahip gezegenlerdir. Kütleleri Dünya’dan biraz büyük olmakla birlikte yarıçapları Jüpiter’inkinden dahi büyük olabilmektedir (örn. KELT-18b, Kepler-51c).

Henüz Örneği Bulunmayan Gezegen Türleri

- ✔ Yaşanabilir Gezegenler (Habitable planets): Yıldızından üzerinde sıvı suyun bulunabileceği kadar uzak ve “yaşanabilir bölge” (habitable zone) adı verilen bölgede bulunmakla birlikte (K2-18b, Kepler-186f, Proxima b), üzerinde gerçekten yaşama uygun koşulların olduğundan emin olduğumuz bir gezegen henüz keşfedilmiş değildir, ama olmaması için de bir sebep yoktur.
- ✔ Dünya İkizi (ing. Earth Twin): Dünya'yla aynı özelliklere (kütle, yarıçap, yıldızından uzaklık, atmosfer) sahip olması beklenen gezegenlerdir.
- ✔ Su Dünyaları (ing. Water Worlds): Teorik olarak var olmaması için sebep bulunmayan, bazı ötegezegenlerin atmosferlerine ilişkin gözlemler yapılabilmesine karşın henüz karşılaşılmamış; sıvı su bakımından çok zengin bu nedenle de yoğunluğu suyun yoğunluğuna çok yakın gezegenlerdir.
- ✔ Elmas Gezegenler (ing. Diamond Planets): Keşfedildiğine yönelik bazı iddialar olsa da bu iddialar doğrudan gezegenin yoğunluk ya da kimyasal kompozisyon ölçümlerine dayanmadığı için henüz teorik bir tür olarak durmaktadır.
- ✔ “Mega” Dünyalar (Mega Earths): Yerin birkaç katı yarıçapa, ancak 10-20 katı arası kütleye sahip yoğun ve büyük, karasal gezegendir. Birkaç iddia olsa da henüz keşfedilmiş ve onaylanmış bir örneği yoktur.





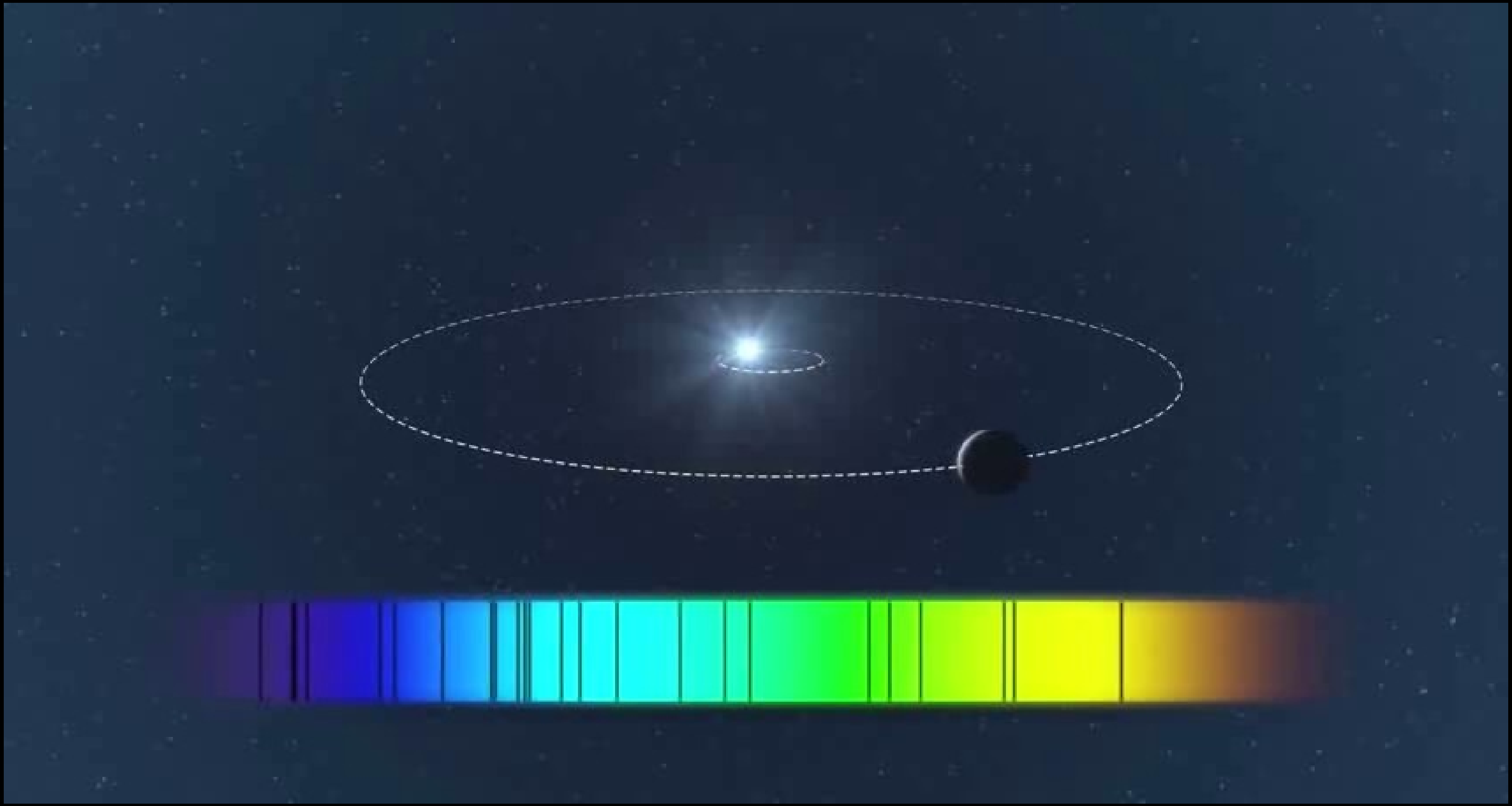
Atmosferinde su bulunan ama yaşam olamaycak bir gezegen: K2-18b

Neredeyse Aklımıza Gelen Her Yöntemle Gezegen Bulduk!

- ✔ Pulsar zamanlaması yöntemiyle (3'ü aynı cismin -PSR B1257 +12b,c,d- etrafında 13 sistemde toplam 16 tane (+0))
- ✔ Dikine hız yöntemiyle (639 sistemde toplam 860 tane (+86))
- ✔ Geçiş yöntemiyle (2220 sistemde toplam 2955 tane (+91))
- ✔ Doğrudan görüntüleme yöntemiyle (100 sistemde toplam 132 tane (+32))
- ✔ Çekimsel mercek yöntemiyle (95 sistemde 101 tane (+19))
- ✔ Çift yıldız zamanlama yöntemiyle (11 sistemde 15 tane (+1))
- ✔ Gezegen geçiş zamanlama yöntemiyle (10 sistemde 11 tane (+3))
- ✔ Pek yakında astrometri yöntemiyle (Gaia) – Belki binlerce !

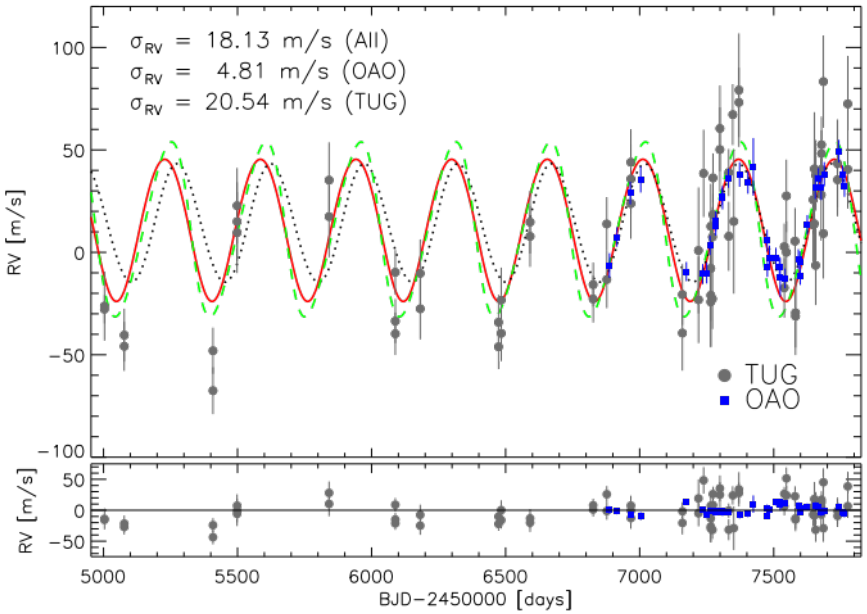
Tüm sayılar exoplanet.eu kataloğundan alınmış olup 20 Eylül 2018 tarihi itibarı ile günceldir.

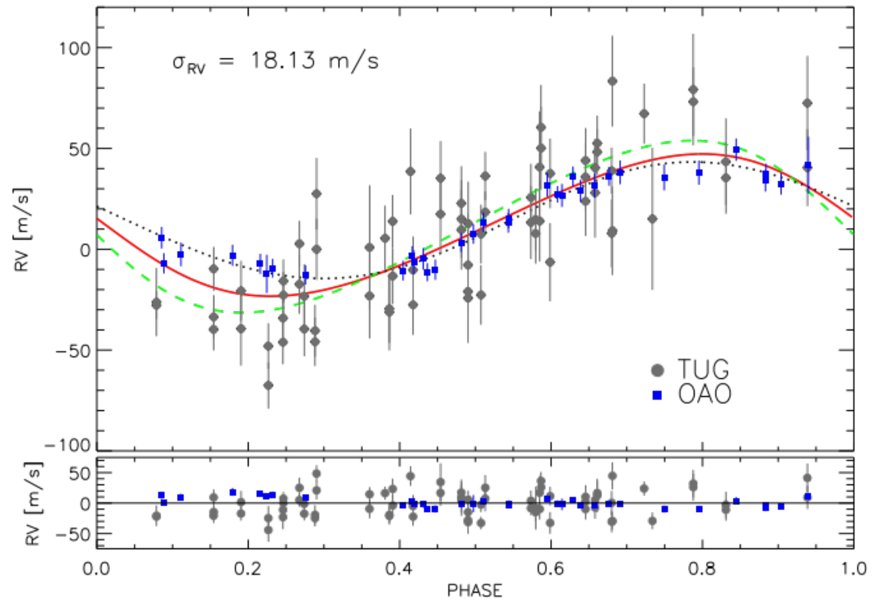
Dikine Hız Tekniği



@djxatlanta: https://www.youtube.com/watch?v=-BuwWtMygxU
2 Ocak 2018

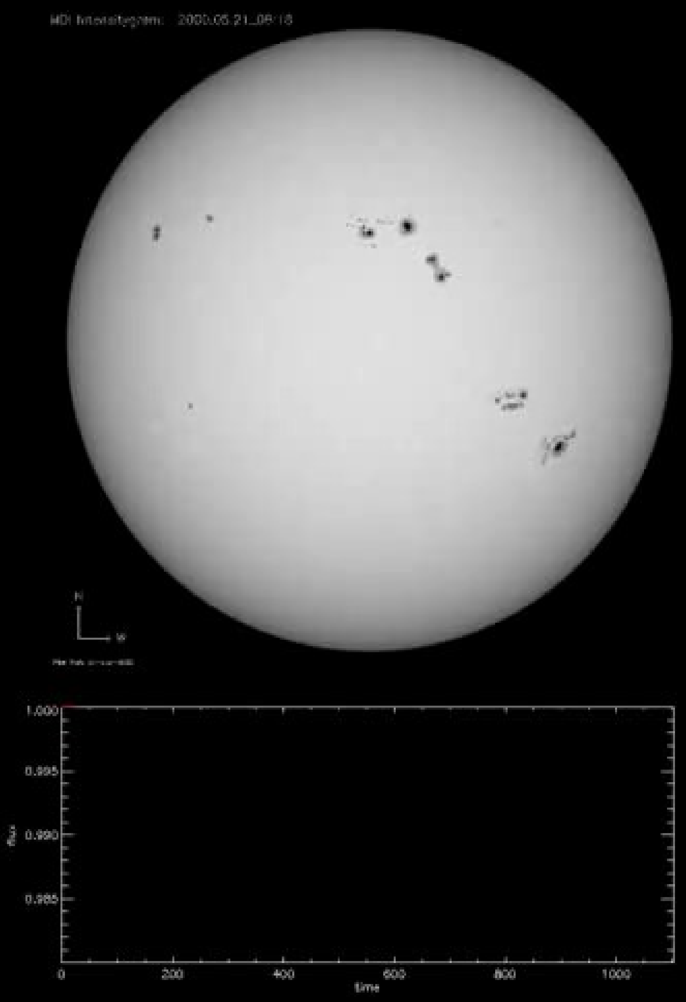
HD208897b, Yılmaz vd. 2017

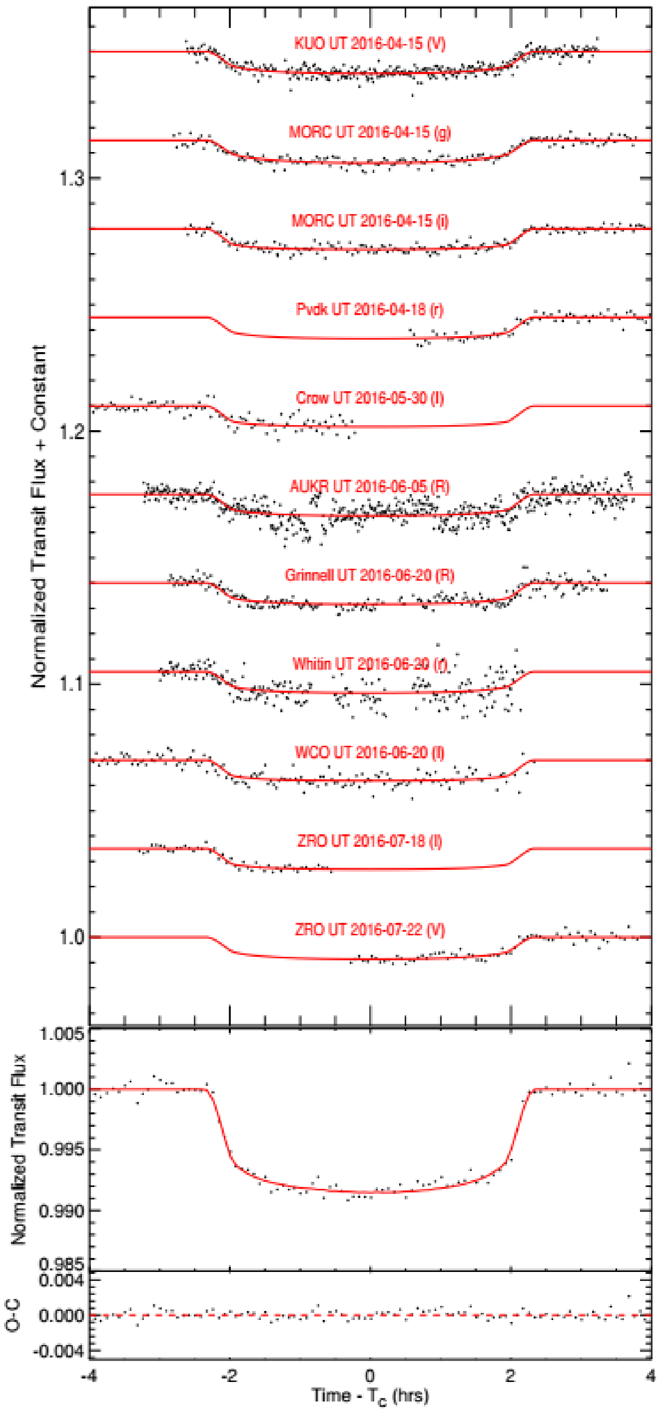




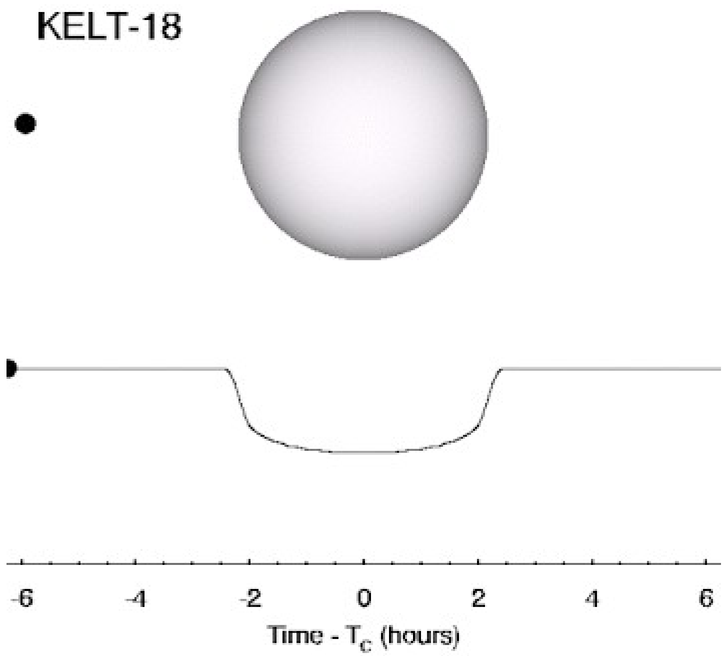
Parameter	TUG+OAO	OAO	TUG
P (days)	352.7 ±1.7	349.7 ±3.3	353.6 ±2.7
K_1 (ms^{-1})	34.7 ±2.2	28.9 ±1.2	42.7 ±5.5
e	0.07 ±0.06	0.04 ±0.03	0.15 ±0.11
ω (deg)	167 ±83	297 ±64	89 ±42
V_0 (ms^{-1})	12.1 ±1.8	14.1 ±0.9	11.2 ±3.8
T_p (BJD-2450000)	5036 ±82	6961 ±54	4971 ±46
m_2 sin$i$ (M_J)	1.40 ±0.08	1.16 ±0.05	1.70 ±0.18
a (AU)	1.05 ±0.03	1.04 ±0.03	1.05 ±0.03
$f_1(m)$ ($10^{-9} M_\odot$) ..	1.5 ±0.3	0.8 ±0.1	1.7 ±0.6
$a_1 sini$ ($10^{-3} AU$) ..	1.1 ±0.1	0.9 ±0.2	1.4 ±0.3
σ_{jitter} (ms^{-1})	12.0	4.0	12.0
ΔRV (ms^{-1})	13.63	-	-
N_{obs}	107	34	73
RMS (ms^{-1})	18.13	4.81	20.54
Reduced $\sqrt{\chi^2}$	0.95	0.96	1.01

Geçiş (Transit) Tekniği

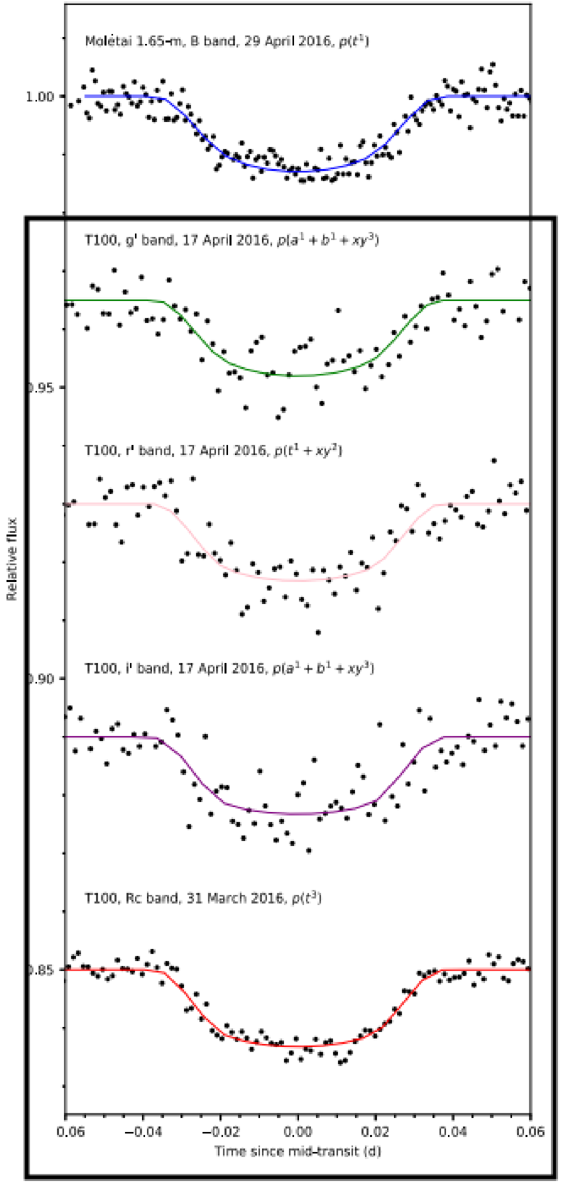


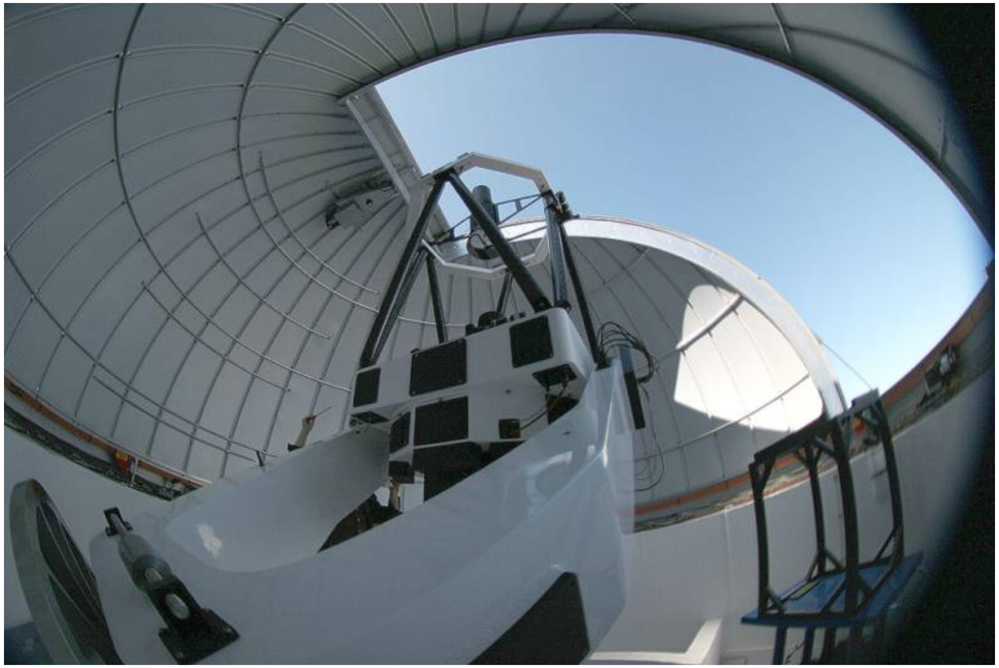


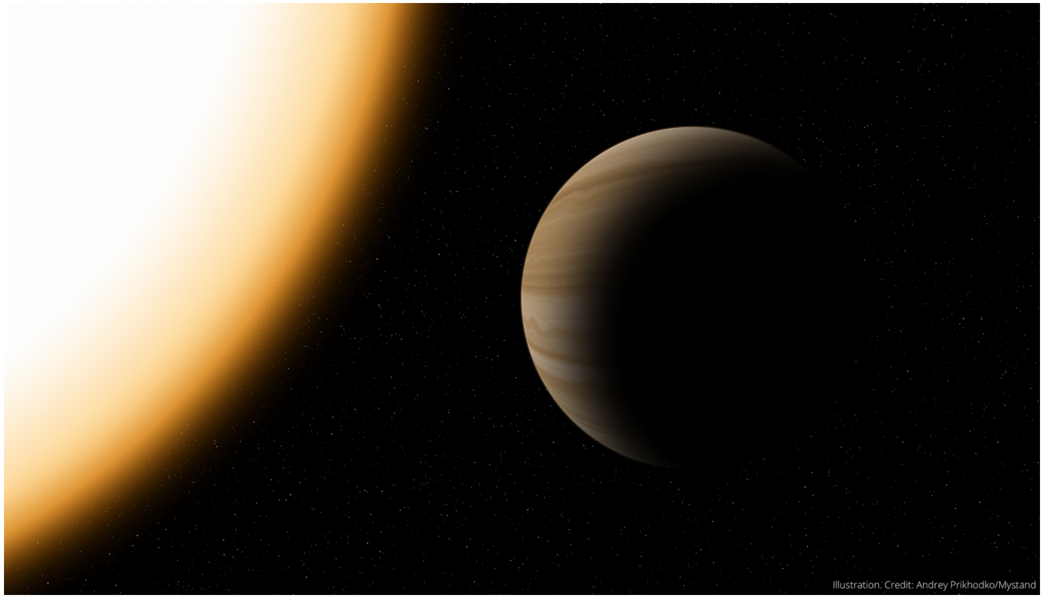
KELT-18b, McLeod et al. 2017


KELT-18
-6
-4
-2
0
2
4
6
Time - T_c (hours)

KPS-1b
Burdanov vd. (2018)







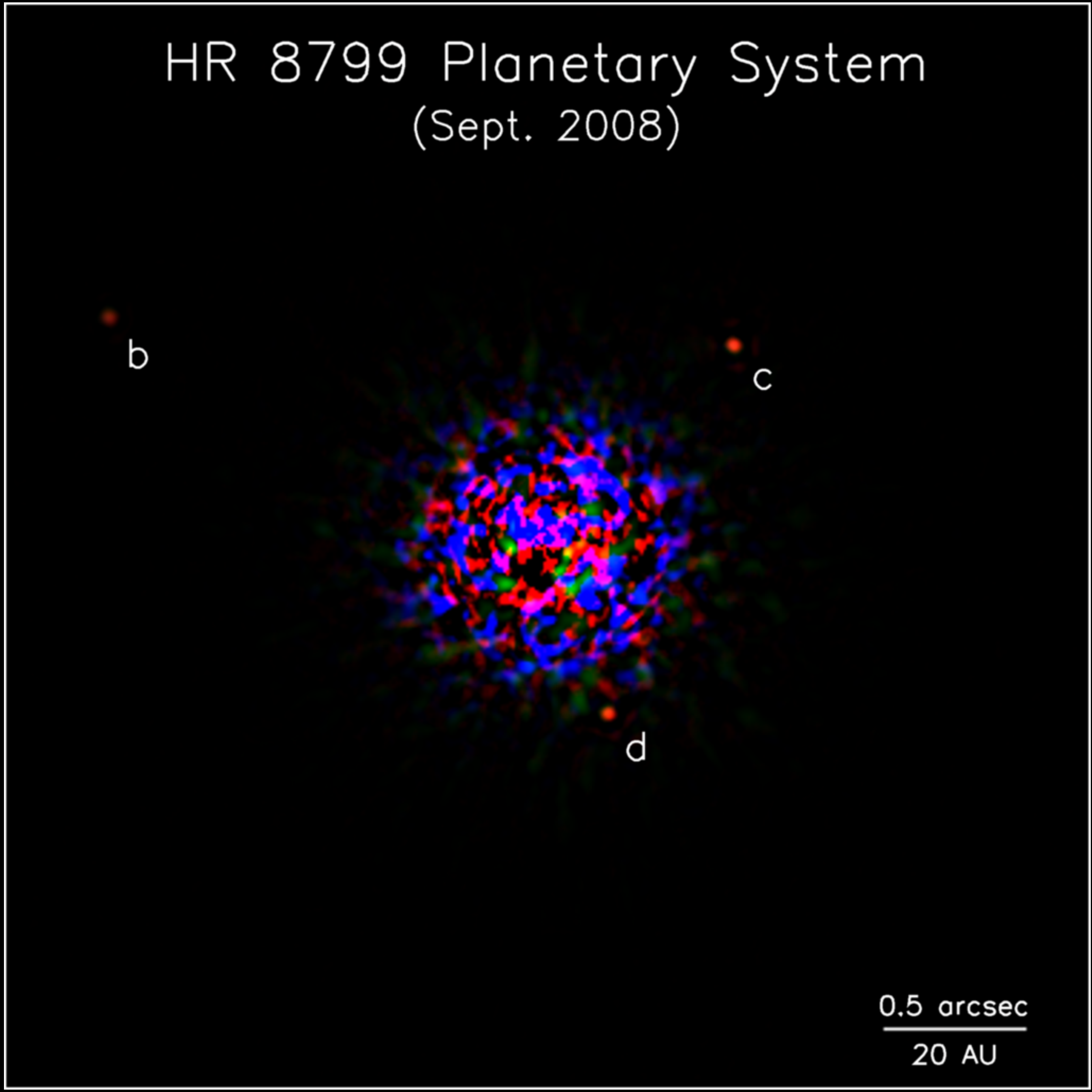
Her Türden Yıldızın Etrafında Gezegen Bulduk!

- ✔ Nötron yıldızlarının (PSR B1257+12b,c)
- ✔ Güneş benzeri yıldızların (51 Peg b)
- ✔ Kırmızı cücelerin (Gliese 876b, Proxima b)
- ✔ Beyaz cücelerin (PSR B1620-26 b)
- ✔ Kahverengi cücelerin (2M1207 b)
- ✔ Dev yıldızların (Iota Dra b)
- ✔ Çok sıcak yldızların (Fomalhaut b)
- ✔ Başıboş gezenler (kahverengi cüce altı cisimler) bile bulduk (PSO J318.5-22 (Liu vd. 2013), SDSS J111010.01 +011613.1 (Gagne vd. 2015))

Çoklu Yıldız Sistemi Gezegenleri
Tattoine’ler

- ✔ Çift sistemlerin etrafında (PSR B1620-26 b)
- ✔ Çift sistem üyelerinden birinin etrafında (55 Cnc b)
- ✔ Üçlü bir yıldız sisteminde (16 Cygni Bb)
- ✔ Dörtlü bir yıldız sistemininin iki üyesinin etrafında (Kepler 64b)
- ✔ Hatta dörtlü bir yıldız sistemindeki yıldızlardan birinin etrafında (30 Ari BAb)

- ✔ Çok yakınımızda (4.3 ışıkyılı) gezegenler (Proxima Cen b)
- ✔ Çok uzağımızda (21500 ışık yılı) OGLE-2005-BLG-390Lb
- ✔ Çok "ağır" gezegenler de (J082303.1-491201b – 28 $M_{Jüp}$) bulduk, çok "hafiflerini" (PSR B1257+12b – 0.02 $M_{Jüp}$) de
- ✔ Çok büyükler de (HAT-P-52b – 2.04 $R_{Jüp}$) var, çok küçükler de (Kepler 37b – 0.30 R_{Yer})...
- ✔ Yeterince büyük bir havuza koysanız "yüzebilecekler" (Kepler 51c – 0.03 g/cm^3) bile bulduk!
- ✔ Bir yılı Dünya yılı ile 163 000 yıl (GU Psc b) sürenler mi istersiniz, 5.8 saat (Kepler 70b, aynı zamanda en sıcak: ~ 7100 K) sürenler mi?


HR 8799 Planetary System
(Sept. 2008)
b
c
d
0.5 arcsec
20 AU

Ötegezegen Araştırmalarının Cevap Vermeye Çalıştığı 5 Büyük Soru*

1 Gezegenler Nasıl Oluşur?

2 Evrende (şimdilik galaksimizde) hangi tür gezegenler var?

3 Gezegenler zamanla nasıl evrimleşiyor?

4 Güneş Sistemimiz nadir bulunabilecek bir gezegen sistemi midir?

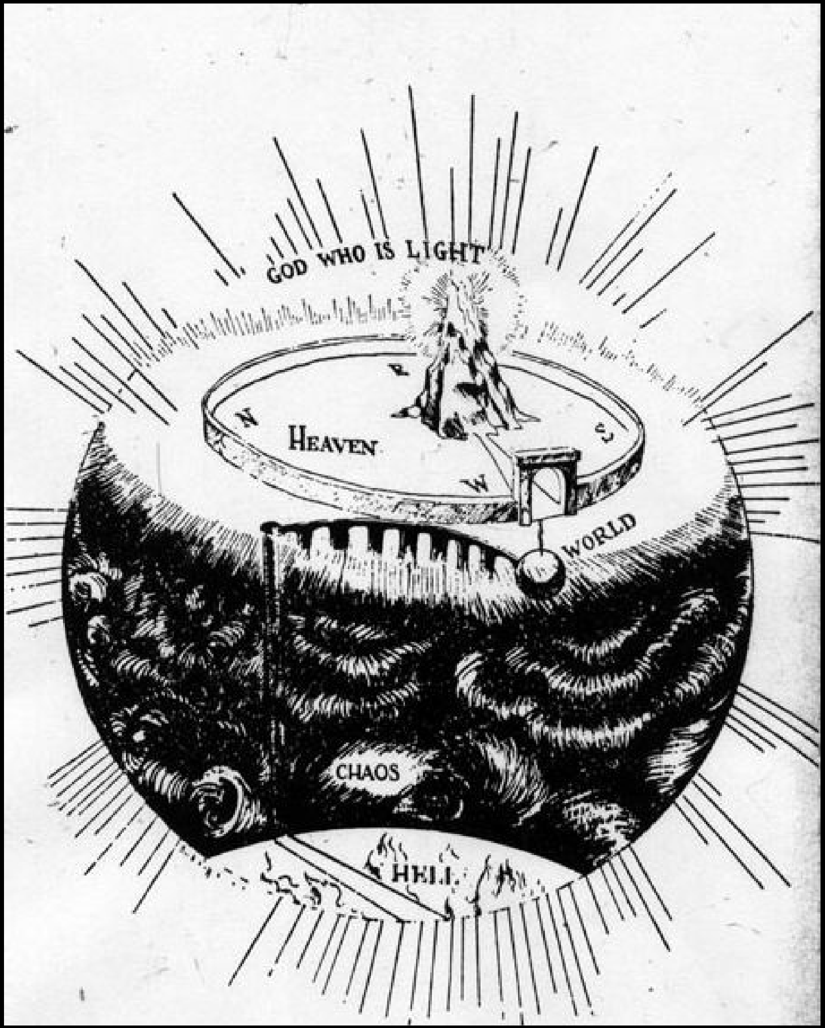
5 Dünya nadir bir bulunabilecek bir gezegen midir?

6 Bonus: Evrende yalnız mıyız?

* https://rockyworlds.wordpress.com/2018/04/08/the-five-biggest-questions-in-exoplanet-science-post-1-6/

Kozmogoni

Milton'ın Evreni



Evren nedir, nasıl bir yerdir ve biz nasıl oluştuk? → Dinler ve Felsefe!

Stonehenge M.Ö. 3000-2000 @ Wiltshire, İngiltere

Kozmoloji

Evren nasıl çalışır?

Yer Merkezli Evren Modeli:

Merkezinde hareketsiz Yer'in bulunduğu, hepsi Yer'e aynı uzaklıktaki yıldızların üstünde bulunduğu bir küre!

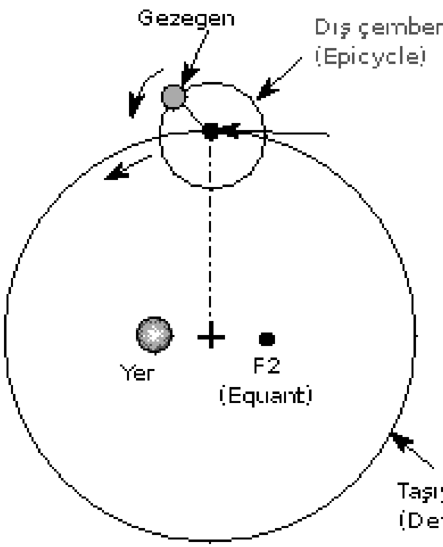
1. Yer'in küresel olduğu,
2. Yer'in büyüklüğü,
3. Tutulmalar

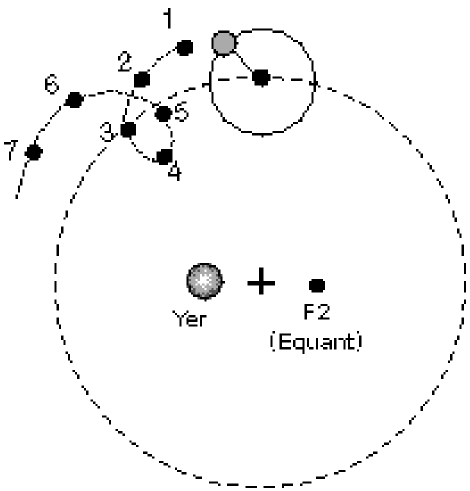
bu modelle açıklanabilmiştir. Ancak,

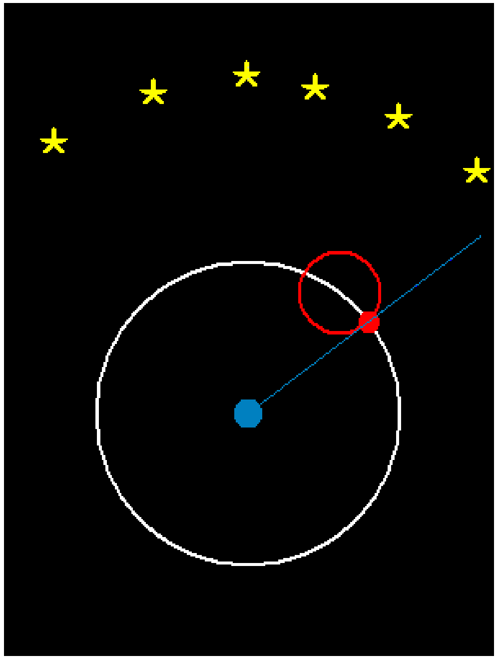
1. Hızı diğer cisimlerden farklı olanlar?
2. Sabit hızla hareket etmeyenler?
3. Geri yönlü (retrograd) hareket yapanlar?


“The School of Athens”, Raphael, 1509-1511

Dış Çemberlerle Retrograd Hareketi Açıklama Çabası

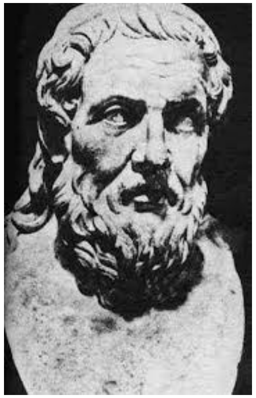






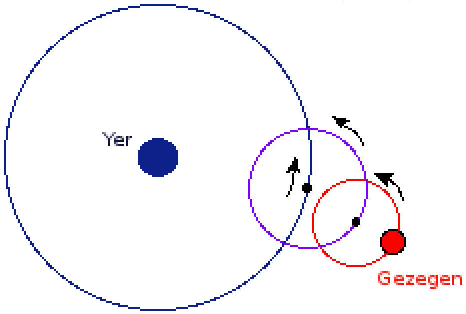
Dış çember saatin ters yönünde dönerken, merkezi de taşıyıcı çemberin üzerinde saat yönünün tersine dolanmaktadır. Dış çemberin hızı F2'ye göre sabittir. Bileşik hareket sağdaki şekilde görülmektedir.

Taşıyıcı çember saat yönünün tersine (1'den 7'ye doğru) hareket etmektedir. Ancak dış çemberin hareketi nedeniyle bileşik hareket 3 ile 5 arasında ters yönlüdür (retrograd).



Perge'li Appolonius (MÖ 262 - 190)

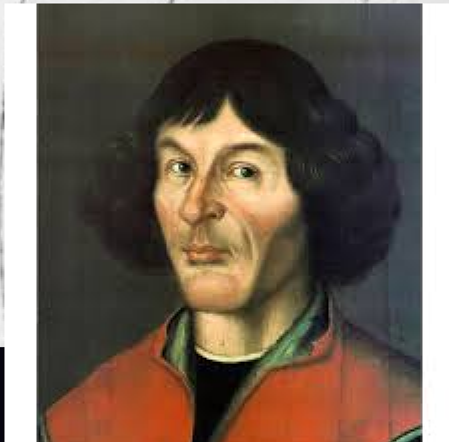
Appolonius, dış çember kullanarak geri yönlü (retrograd) hareketi, Yer'i merkezden alıp, dış çemberin merkezinin hareketini diğer odağa göre sabit yaparak sabit hızla gerçekleşmeyen hareketi de başarıyla açıklamış oldu. Ama teorisi hala gezegen gözlemlerinde ulaşılan bazı gözlemsel sonuçları açıklayamıyordu.



Batlamyus (Ptolemy) (90 – 168) bu problemi iki dış çember kullanarak gidermeye çalıştı.

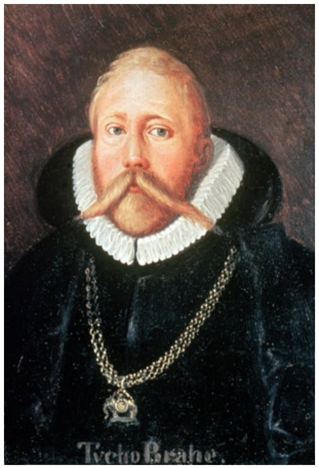
Güneş Merkezli Evren Modeli

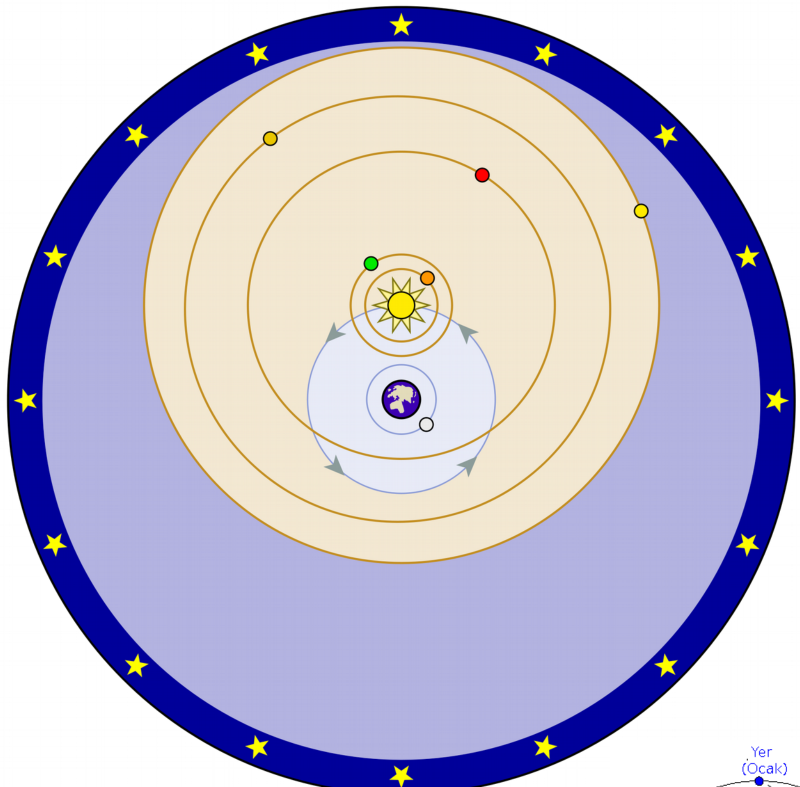
Böylece Mars ve Güneş'in konumlarını daha hassas ve çok daha basit bir modelle açıklamak mümkün oldu!

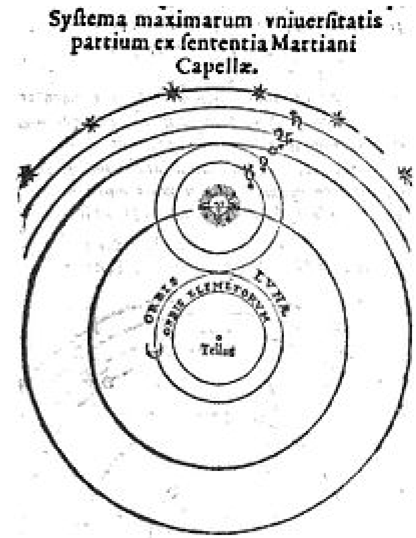


Nicolas Copernicus (1473 - 1543)

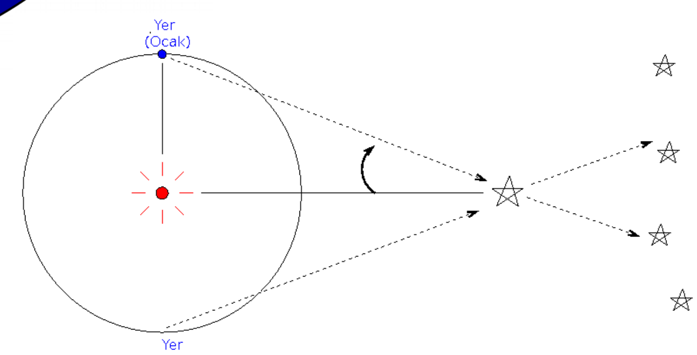
Tycho Brahé (1546 - 1601)
Melez Yer-Güneş Merkezli Evren Modeli



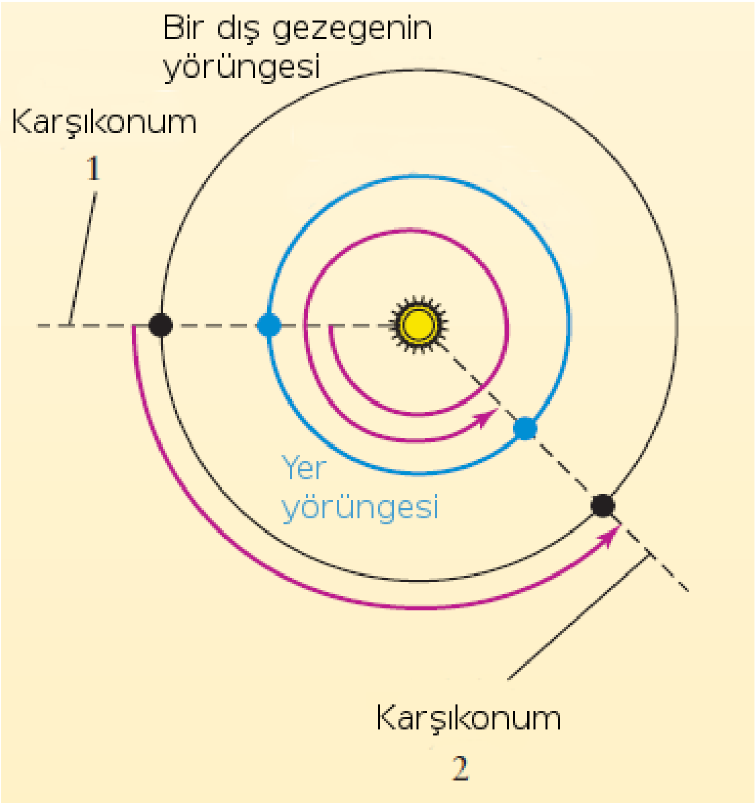




Tycho gelmiş geçmiş en iyi gözlemcilerden biri (belki de birincisi olduğu halde) Dünya'nın Güneş çevresinde dolanması durumunda yıldızların paralaktik hareket göstermesini beklediği halde bunu gözleyemediği için melez bir modele yöneldi. Eksik olan onun gözlemleri değil, paralaktik hareketi ölçecek teknolojiye (teleskop!) henüz ulaşılamamış olmasıydı...



YÖRÜNGE DÖNEMİ – KAVUŞUM DÖNEMİ



Kavuşum Dönemi (S): Gök cisminin aynı konfigürasyonda arka arkaya iki dizilişi arasındaki süre. (Örneğin iki karşıkonum ya da iki iç kavuşum)

Yörünge Dönemi: Bir gezegenin Güneş etrafında bir tam turunu attığı süre.

P: Gezegenin yörünge dönemi
E: Dünyanın yörünge dönemi (365.25 gün)
S: Kavuşum dönemi (gün cinsiden)

Dünyanın bir günde yörüngesi üzerinde katettği açısal yol 360 / E; dış gezegenin bir günde yörüngesi üzerinde katettği açısal yol 360 / P olmak üzere; iki karşıkonum arasında her iki cismin aldığı açısal yol (Dünyanın bu sırada dış gezegene tur bindireceği bu nedenle de 360 derece daha fazla açısal yol alacağı açıktır):

$$\frac{360}{P}\times S+360=\frac{360}{E}\times S$$

Her iki taraf 360xS 'ye bölünürse dış gezegen için karşıkonum koşulu;

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{E}-\frac{1}{S}$$

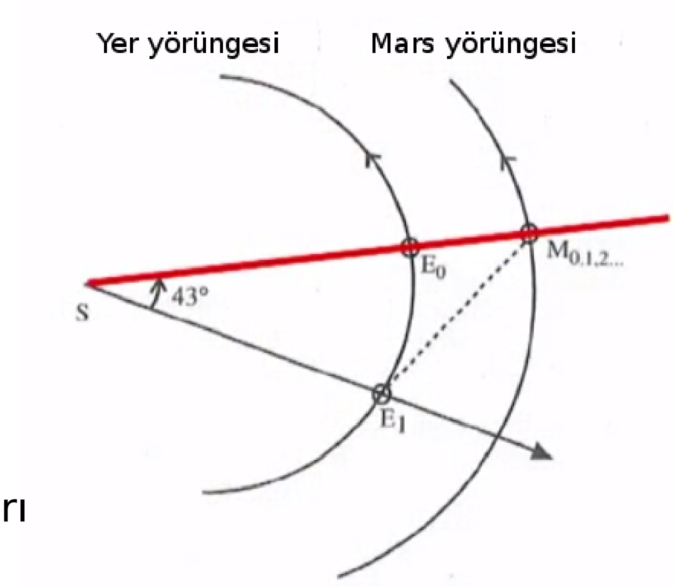
Dünya yörüngesinin içinde bir yörüngeye sahip gezegen için iç kavuşum koşulu;

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{E}+\frac{1}{S}$$

(türetiniz...)

Johannes Kepler (1571 - 1630)

- ✔ Güneş merkezli modelde Güneş (S) hareketsiz
- ✔ Başlangıç: Yer ve Mars aynı hizada (E_0 – M_0)
- ✔ 1 Mars yılı (687 gün) sonra 1.88 Yer yörüngesi (E_1 – M_1).
- ✔ Dünya'nın dolanma periyodunu bildğiniz için iki konum arasında 43º fark (E_0SE_1 açısı) hesapla bulunabilir
- ✔ Daha sonra gökyüzünde Mars'ın bir Mars yılı öncesine göre konumunu ölçerseniz (M_1), Mars ile Yer'in konumları arasındaki açıyı ölçmüş olursunuz (SE_1M_1 açısı).



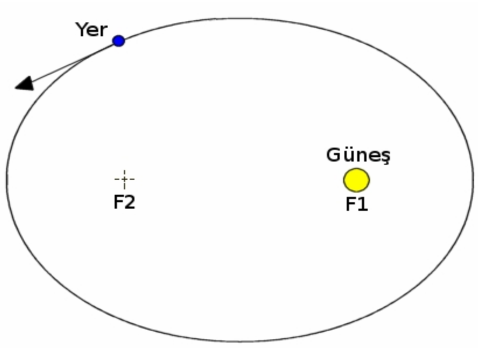
✔ Artık üçgenin iki açısını biliyorsunuz, E_1M_1S açısını kolaylıkla hesaplayabilirsiniz. Bu size Yer'in (E_1) ve Mars'ın (M_1) yörüngeleri üzerindeki konumları verir.

✔ Bu işlemi defalarca yaparsınız, hem Yer'in hem de Mars'ın yörüngelerinin tamamını kapsayarak yörünge geometrilerini çıkarabilirsiniz.

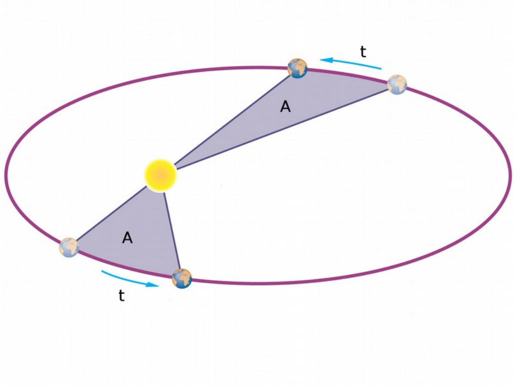
Kepler Yasaları

Böylece Kepler, Mars ve Yer'in (Brahe tarafından yapılan) yörünge gözlemlerinden bugün “Kepler Yasaları” adını verdiğimiz şu 3 sonucu çıkardı.

1. Gezegenlerin yörüngeleri odaklarından birinde Güneş bulunan bir elips şeklindedir.



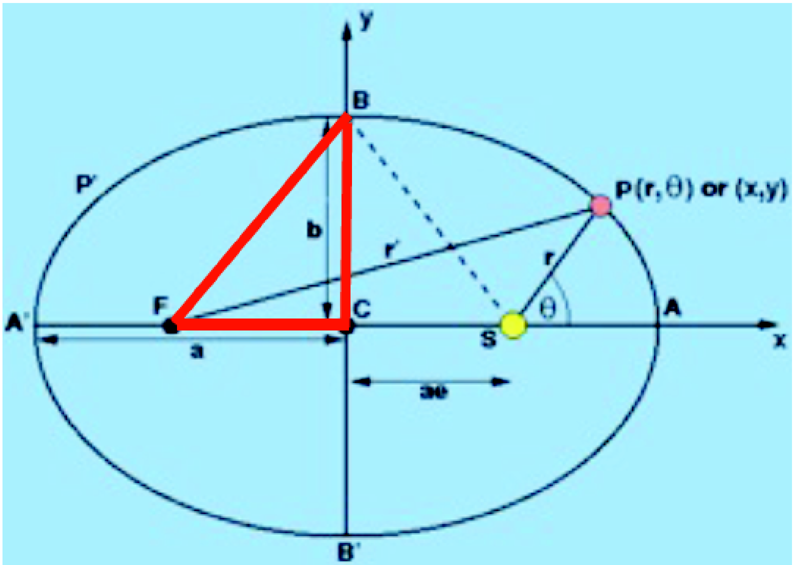
2. Gezegenler yörüngeleri üzerinde eşit zaman aralıklarında eşit alanlar tararlar.



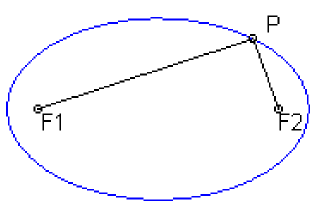
3. Gezegenlerin yörünge büyüklükleri (küpü) ile dönemleri (karesi) arasında bir orantı vardır.

$$\frac{a^3}{P^2} = \text{sabit}$$

1. Kepler Yasası: Elips Formalizmi



a: Yarı-büyük eksen uzunluğu,
b: Yarı-küçük eksen uzunluğu,
e: Dış merkezlilik (eksantrisite),
F,S: Elipsin odakları,
r, θ: Kutupsal koordinatlar,
x, y: Kartezyen koordinatlar



Kutupsal Koordinatlar

$$\boxed{r + r' = 2a = \text{sabit}} \qquad (1)$$

FSP üçgeninde kosinüs teoremini uygulayalım

$$(r')^2 = r^2 + |FS|^2 - 2\,r\,|FS| \cos(FSP)$$

$$\cos(FSP) = \cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta),$$
$$|FS| = 2ae$$
$$r' = 2a - r$$

Yerine koyacak olursak,

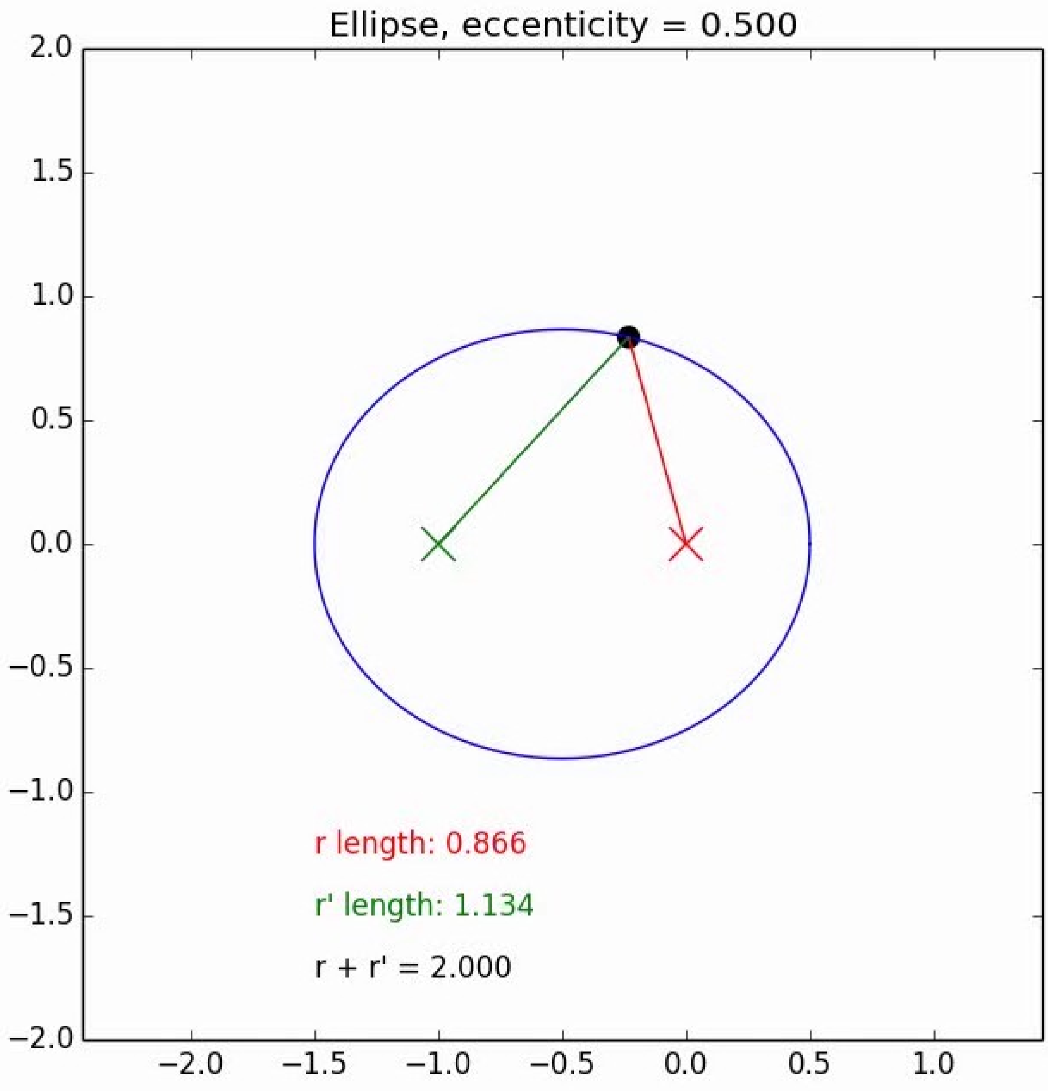
$$(r')^2 = r^2 + (2ae)^2 - 2\,r\,(2ae)\;(-\cos(\theta))$$
$$(2a - r)^2 = r^2 + (2ae)^2 + 2\,r\,(2ae)\cos(\theta)$$

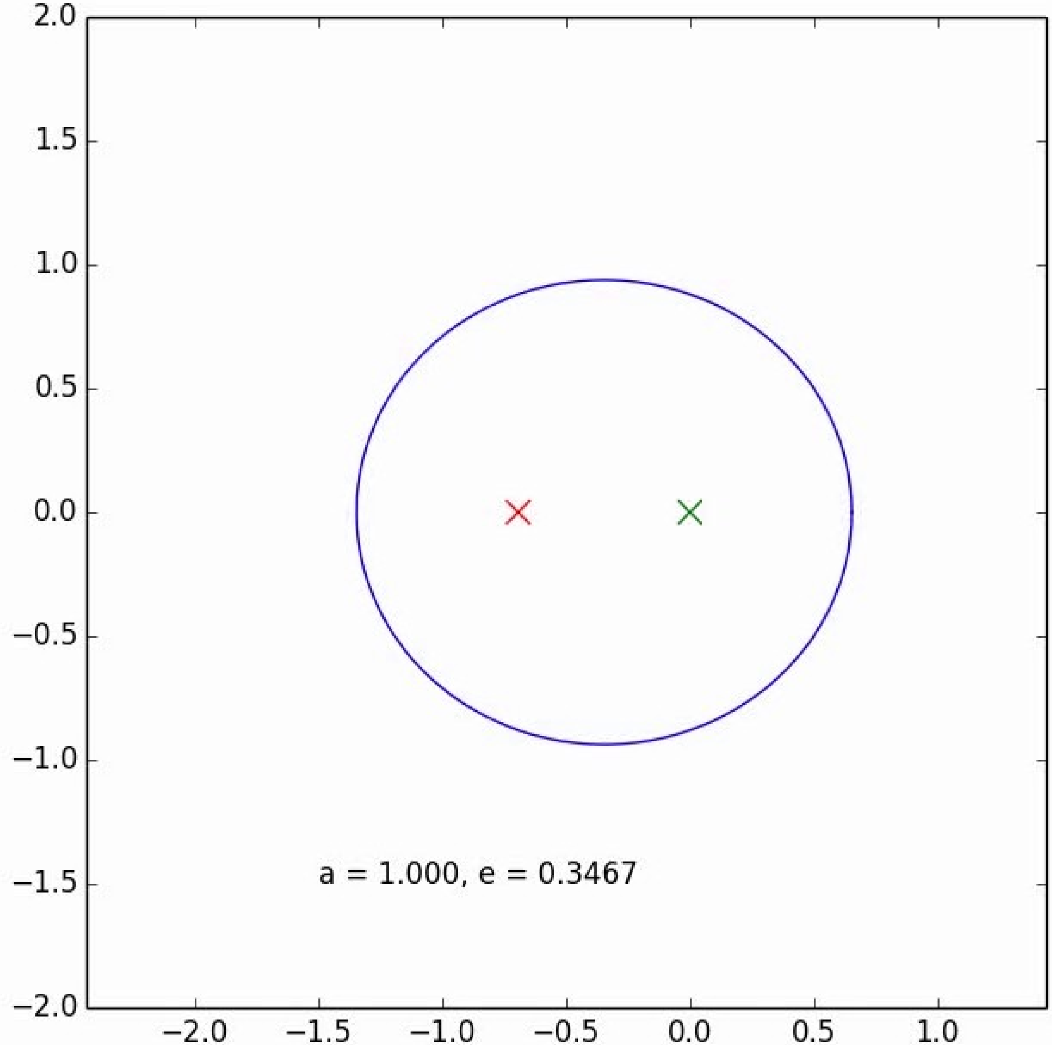
Şimdi r'yi çekelim,

$$\boxed{r = a\,(1 - e^2) / (1 + e\cos\theta)} \qquad (2)$$

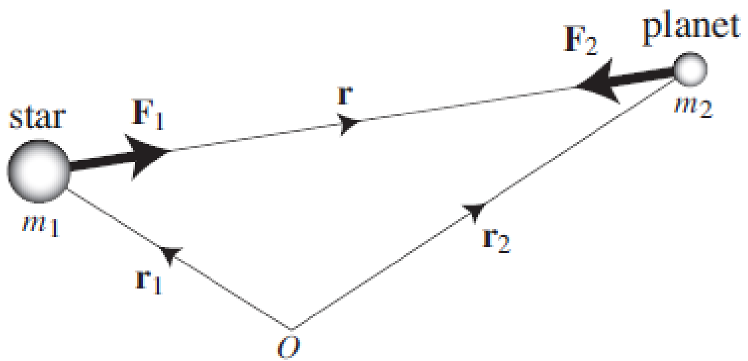
FCB üçgeninde Pisagor teoremi gereği,

$$\boxed{b^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1 - e^2)} \qquad (3)$$


Ellipse, eccenticity = 0.500
r length: 0.866
r' length: 1.134
r + r' = 2.000
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
a = 1.000, e = 0.3467

2 cisim problemi



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Her iki kütle için Newton yasasını aşağıdaki şekilde yazabilirsiniz

$$F_1 = m_1\ddot{\vec{r}}_1 = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \qquad F_2 = m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

Bu denklemlerii basitleştirecek olursak

$$\ddot{\vec{r}}_1 = G\frac{m_2}{r^3}\vec{r} \qquad \ddot{\vec{r}}_2 = -G\frac{m_1}{r^3}\vec{r}$$

Aşağıdaki çıkarma işlemi ile bu iki ifadeyi taraf tarafa çıkaralım

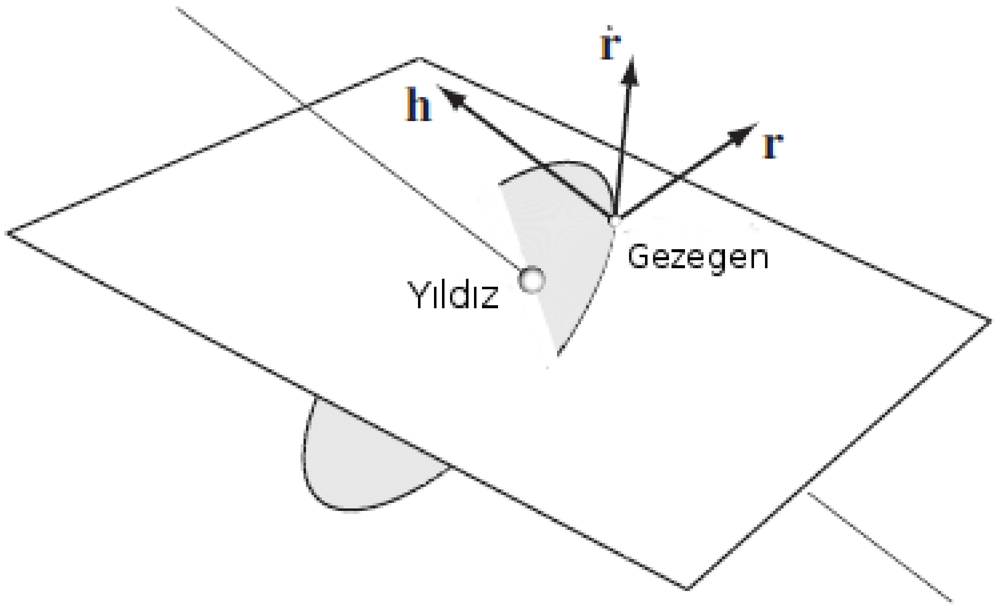
$$\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -G\frac{m_1+m_2}{r^3}\vec{r} \quad \text{ve} \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 \qquad \ddot{\vec{r}} + G\frac{m_1+m_2}{r^3}\vec{r} = 0$$

r vektörüyle eşitliğin her iki tarafın vektörel çarpacak oursak

$$\vec{r}\, x\, \ddot{\vec{r}} + \left(G\frac{m_1+m_2}{r^3}\right)\vec{r}\, x\, \vec{r} = 0 \longrightarrow \vec{r}\, x\, \ddot{\vec{r}} = 0 \longrightarrow \vec{r}\, x\, \dot{\vec{r}} = \vec{h}$$

Açısal momentum integrali

Bu sonucun anlamı...



Yörünge hareketi sırasında bir gezegenin (m_2) konum ve hız vektörleri aynı düzlem üzerinde ve birbirlerine diktir. Momentum integralinin sabiti (h) ise bu her iki vektöre de diktir!

İşleme kutupsal koordinatlarda devam etmeliyiz.

$$\hat{r}=\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y} \longrightarrow \dot{\hat{r}}=(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})(\dot{\theta}) \longrightarrow \dot{\hat{r}}=\hat{\theta}(\dot{\theta})$$

r vektörünü açık yazıp, türevini alacak olursak

$$\vec{r}=r\hat{r} \longrightarrow \dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{r}+r\hat{\theta}\dot{\theta}$$

elde ederiz. Şimdi bu ifadenin ikinci türevini alıp bilinmeyenleri yerine koyalım

$$\ddot{\vec{r}}=\ddot{r}\hat{r}+\dot{r}\dot{\hat{r}}\dot{\theta}+\dot{r}\hat{\theta}\dot{\theta}+r\dot{\hat{\theta}}\dot{\theta}+r\hat{\theta}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\vec{r}}=\ddot{r}(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})+\dot{r}(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})\dot{\theta}+\dot{r}(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})\dot{\theta}+r(-\cos(\theta)\hat{x}-\sin(\theta)\hat{y})\dot{\theta}\dot{\theta}+r(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})\ddot{\theta}$$

Şimdi bu çirkin ifadeyi biraz sadeleştirelim.

$$\ddot{\vec{r}}=(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})(\ddot{r}-r(\dot{\theta})^2)+(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})(\dot{r}\dot{\theta}+\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})$$

$$\ddot{\vec{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\hat{\theta} \longrightarrow \ddot{\vec{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{\theta}$$

Şimdi r vektörünü ve türevini açısal momentum integralinde yerine koyalım

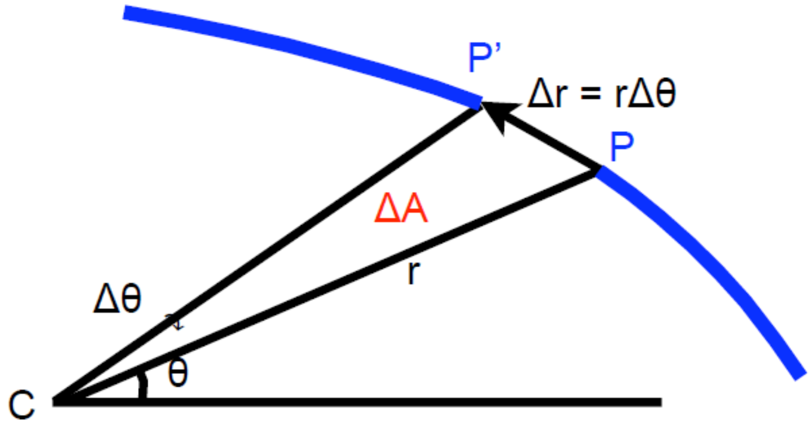
$$r\hat{r}\,x\,(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta})=h \longrightarrow r^2\dot{\theta}\hat{r}\,x\,\hat{\theta}=h$$

r ve θ birim vektörlerini yerine koyalım

$$r^2\dot{\theta}(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})\,x\,(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})=h$$

$$r^2\dot{\theta}(\cos^2(\theta)\hat{z}+\sin^2(\theta)\hat{z})=\vec{h} \longrightarrow h=r^2\dot{\theta}$$

2. Kepler Yasası:
“Birim zamanda taranan alan sabittir ($dA / dt = C$)”



Yörünge hareketi için;
“Birim zamanda taranan alan sabittir” →
“Açısal momentum korunur”

Δr = (PP') yayının uzunluğu rΔθ kadardır.
Bu yay r'ye göre çok küçük olduğu için,
CPP' bir üçgen olarak varsayılabilir.
Bu durumda bu üçgenin alanı ΔA

$$\Delta A = \frac{1}{2}\, r\, \Delta r = \frac{1}{2}\, r^2\, \Delta\theta$$

Her iki tarafın zamana göre türevini alırsak

$$\Delta A / \Delta t = \frac{1}{2}\, r^2\, \Delta\theta / \Delta t$$

Diferansiyel formda yazacak olursak

$$\boxed{dA / dt = \frac{1}{2}\, r^2\, d\theta / dt = C = h/2} \quad (4)$$

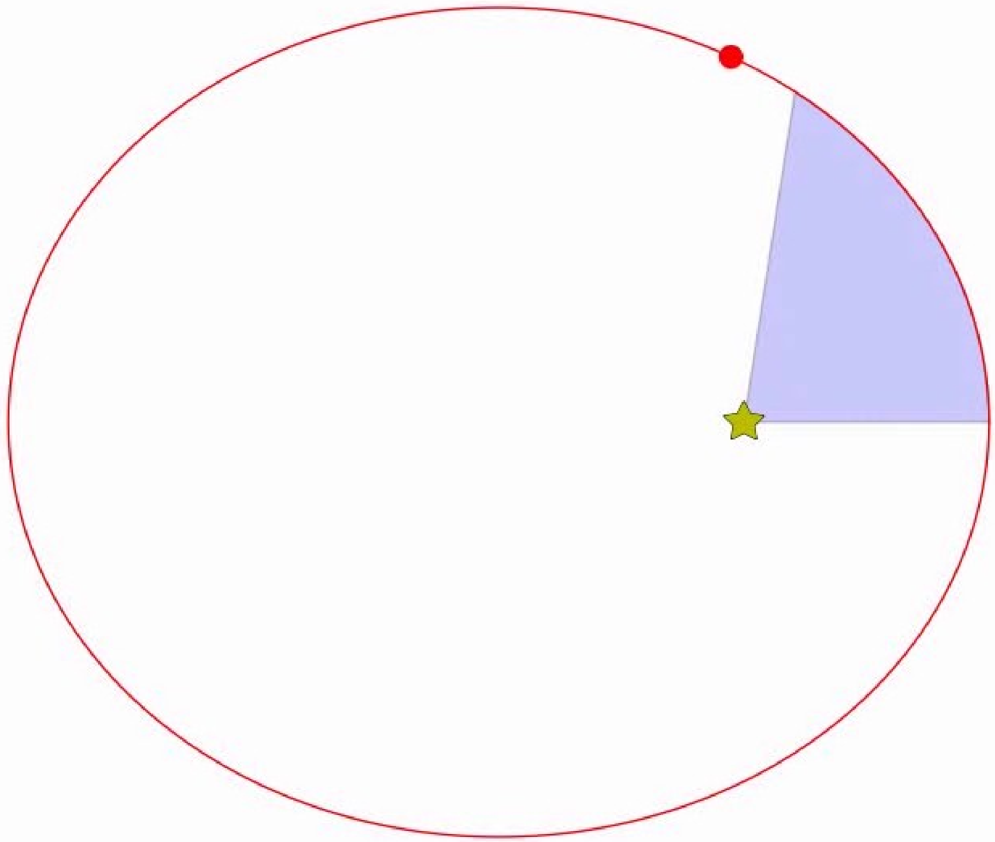
J: açısal, p çizgisel momentum o.ü.

$$J = r \times p = r \times mv$$

$$J = r\, m\, \Delta r / \Delta t = m\, r\, (r\Delta\theta / \Delta t)$$

$$\boxed{J = m\, r^2\, (\Delta\theta / \Delta t) = 2mC = \text{sabit}} \quad (5)$$

Aynı şekilde yine sağ taraf sabit olduğu için
açısal momentum da sabittir!



Denklemlerle “oynamayı” sürdürelim!

Hareket denklemi: $\ddot{r}+G\frac{m_1+m_2}{r^3}\vec{r}=0$

Bu kez ivme vektörünü yerine koyalım → $(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}=-G\frac{m_1+m_2}{r^3}\vec{r}$

$\ddot{\vec{r}}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

Eşitliğin sağ tarafına $0*\hat{\theta}$ ekleyelim $(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}=-G\frac{m_1+m_2}{r^3}\vec{r}+0*\hat{\theta}$

sağ ve sol taraftaki terimleri karşılıklı olarak eşitleyelim $(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\hat{r}=-G\frac{m_1+m_2}{r^3}r\hat{r}$ ve $(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}=0*\hat{\theta}$

Sonuç olarak $\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-G\frac{m_1+m_2}{r^2}$

diferansiyel denklemini elde ederiz. Hareket denklemini çözmek ve gezegenin konumunu, hızını ve ivmesini elde etmek için bu denklemi çözmeliyiz. Buradaki zorluk r ve θ ‘nın zamanın birer fonksiyonu olmasıyla birlikte r ‘nin θ’ya da bağlı olmasıdır!

Çözüm için momentum integraline tekrar dönmeliyiz...

Açısal momentum integralini hatırlayacak olursak

$$h=|\vec{r}\, x\, \dot{\vec{r}}|=|(rcos(\theta)\hat{x}+rsin(\theta)\hat{y})\, x\, (\dot{r}(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})+r(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y}))\dot{\theta}|=r^2\dot{\theta}\hat{z}$$

θ'nın türevini çekersek $\dot{\theta}=\frac{h}{r^2} \longrightarrow \ddot{\theta}=\frac{-2hr\dot{r}}{(r^2)^2}=-(\frac{2h\dot{r}}{r^3})$

Türev için zincir kuralını uygulayacak olursak;

$$\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \longrightarrow \ddot{r}=\frac{d^2r}{d\theta^2}(\dot{\theta})^2+\frac{dr}{d\theta}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-G\frac{m_1+m_2}{r^2} \longrightarrow \frac{d^2r}{d\theta^2}(\dot{\theta})^2+\frac{dr}{d\theta}\ddot{\theta}-r(\dot{\theta})^2=-G\frac{m_1+m_2}{r^2}$$

Şimdi θ'nın birinci ve ikinci türevi için bulduklarımızı yerlerine koyalım

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}(\frac{h}{r^2})^2+\frac{dr}{d\theta}(\frac{-2h\dot{r}}{r^3})-r(\frac{h}{r^2})^2=-G\frac{m_1+m_2}{r^2} \longrightarrow \frac{h^2}{r^4}(\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}\frac{dr}{d\theta}-r)=-G\frac{m_1+m_2}{r^2}$$

$$\frac{h^2}{r^4}(\frac{d^2r}{d\theta^2}-2\frac{(dr/d\theta)^2}{r}-r)=-G\frac{m_1+m_2}{r^2}$$

Bu denklemi çözmek için bir değişken değişimine ihtiyacımız var. r = 1 / u olmak üzere,

$$r=\frac{1}{u} \longrightarrow \frac{dr}{d\theta}=-\left(\frac{1}{u^2}\right)\frac{du}{d\theta} \longrightarrow \frac{d^2r}{d\theta^2}=\left(\frac{2}{u^3}\right)\left(\frac{du}{d\theta}\right)-\left(\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

Bir önceki sayfada bulduğumuz her şeyi burada yerine koyacak olurak

$$(h^2u^4)\left[\left(\frac{2}{u^3}\right)\left(\frac{du}{d\theta}\right)-\left(\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)-2u\left(\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]=-G(m_1+m_2)u^2$$

Denklem yandaki şekilde basitleşir: $h^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)=-G(m_1+m_2)$

Bu tür diferansiyel denklemlere Binet denklemleri denir ve çözümleri aşağıdaki gibidir...

$$u=\frac{G(m_1+m_2)}{h^2}(1+e\cos(\theta-\varpi))$$

r = 1 / u dönüşümünü tekrar yapar ve yeni bir değişken (p) tanımlarsak

$$p=\frac{h^2}{G(m_1+m_2)}$$

$$h=\sqrt{(pG(m_1+m_2))}$$

Konum vektörünü de $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\varpi)}$ olarak elde ederiz.

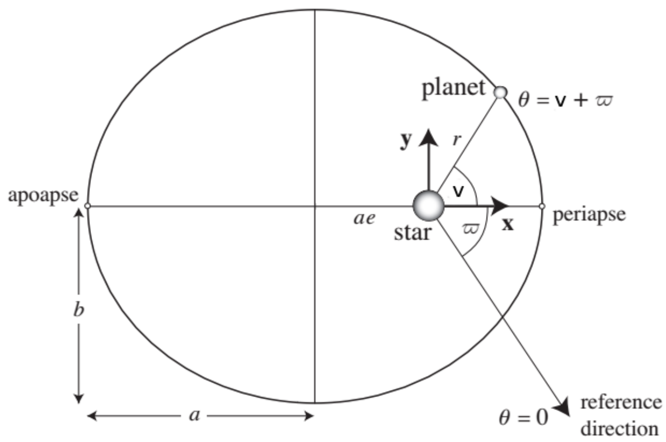
Kepler'in 3. Yasası

Bulduğumuz konum vektörü r, geometirik olarak konik kesitleri adı verilen bir eğri ailesini tanımlar. Herhangi bir sistem için eğrinin ne olacağını başlangıç koşulları belirler.0 < e < 1 için eğri bir elipstir ve p parametresi $p = a(1 – e^2)$ olur.

$$r=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\left(\theta-\varpi\right)}$$

Bu bizi Kepler'in 1. Yasası'na getirdi. Yörüngenin elips olduğunu bildiğimizden integralin sabitlerini (e ve ω) geometrik olarak tanımlayabiliriz. θ, gerçel anomali, ω ise enberinin boylamı adlarını alır.

$\theta = \omega \rightarrow r_{min} = a(1 - e)$ (enberi) ve $\theta = \omega + \pi \rightarrow r_{max} = a(1 + e)$ (enöte) olur



Şimdi elipsin alanını yazalım

$$A=\pi a b=\int dA=\int_0^T \frac{1}{2} h\,dt=\frac{hT}{2}$$

$$T=\frac{2\pi a b}{h}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{G\left(m_1+m_2\right)}a^3$$

Kepler'in 3. Yasası:
"Gezegenlerin Yörünge Büyüklükleri ile Dönemleri Orantılıdır!"

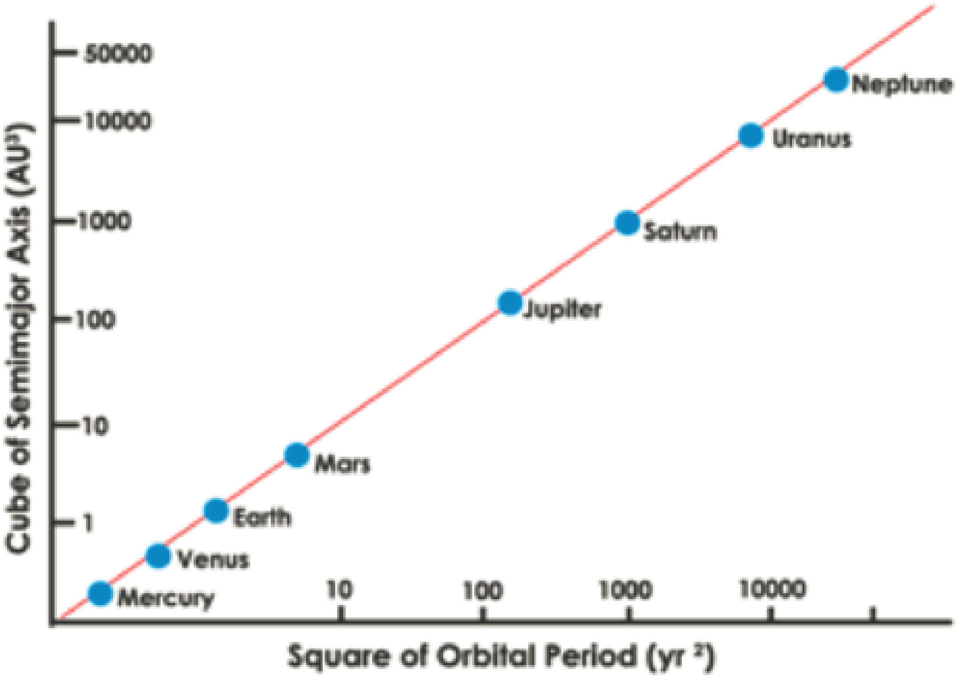
Üçüncü yasa aslında gözlemsel (empirik) bir sonuçtur. Gezegenlerin yörünge büyüklüklerinin (yarı-büyük eksen uzunluklarının) kareleri, dolanma dönemlerinin küplerine karşılık çizdirildiğinde aralarında lineer bir ilişkinin olduğu görülür.

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3$$

Şeklinde ifade edilen bu ilişkide;
P [yıl], a[AB], M[$M_{güneş}$] seçilirse

$$P^2 = a^3$$

bulunur.



Sonuç olarak...

Gezegenin yörünge döneminin (P); dış merkezliliğinden (e) bağımsız ve toplam kütle (m_1 + m_2) ile yıldıza olan uzaklığın (ya da yörünge büyüklüğünün, a) bir fonksiyonu olduğnu bulduk. "Tur sayısı" parametresini (n) aşağıdaki şekilde tanımlayacak olursak.

$n = \frac{2\pi}{T}$ ise $G(m_1+m_2) = n^2 a^3$ ya da $h = \sqrt{(G(m_1+m_2)a(1-e^2))} = n\,a^2\sqrt{(1-e^2)}$

Şimdi yine hareket denklemini kullanarak gezegenin hızını bulalım:

$$\ddot{r} + \frac{G(m_1+m_2)}{r^3}\vec{r} = 0$$

Denklemin her iki tarafının r'nin türeviyle skaler çarpacak olursak

$$\dot{r}\,.\,\ddot{r} + \frac{G(m_1+m_2)}{r^2}\dot{r} = 0\,.\,\dot{r}$$

ve bu ifadeyi t kadar bir süre için integre edecek olursak

$$\frac{1}{2}\dot{r}\,.\,\dot{r} - \frac{G(m_1+m_2)}{r} = C \longrightarrow \frac{1}{2}V^2 - \frac{G(m_1+m_2)}{r} = C$$

Vis-viva İntegrali

Gezegenin enerjisi yörünge boyunca korunur!

Kepler Problemi

Yörüngenin uzaydaki konumunun (ῶ) değişmediğini varsayacak olursak θ = ῶ + ν

$$\dot{\theta}=\dot{\nu}\Rightarrow V^2=\dot{r}.\dot{r}=r^2(\dot{\nu})^2$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\nu)} \longrightarrow \dot{r}=\frac{r\dot{\nu}e\sin(\nu)}{(1+e\cos(\nu))^2} \longrightarrow \dot{r}=\frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}}e\sin(\nu)$$

$$r\dot{\nu}=\frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}}(1+e\cos(\nu)) \longrightarrow V^2=\frac{n^2a^2}{1-e^2}(1+2e\cos(\nu)+e^2)$$

$$V^2=G(m_1+m_2)(\frac{2}{r}-\frac{1}{a})$$

Böylece gezegenin konumu ve ivmesinin yanı sıra hızını da hesaplamış olduk. Ancak bu parametrelerin hepsini zamanın değil gerçel anomali açısının (θ) birer fonksiyonu olarak bulmuş olduk.

Çözümü gerçel anomalinin değil zamanın bir fonksiyonu olarak bulmak için Kepler Problem'ini, çözmeliyiz.

Kepler Probleminin Çözümü

2 cisim problemini gerçel anomalinin bir fonksiyonu olarak çözdük. Şimdi sıra zamana bağımlılığı elde etmeye geldi. Böylece gezegenin bir t anında nerede, hangi hızda ve hangi ivmeyle hareket ettiğini de anlamış, yani hareket denkleminin tam bir çözümünü elde etmiş olacağız.

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\nu)} \longrightarrow r\dot{\nu}=\frac{na}{\sqrt{(1-e^2)}}(1+e\cos(\nu))$$

$$V^2=G(m_1+m_2)\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\dot{r}^2=n^2a^3\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)-\frac{n^2a^4(1-e^2)}{r^2} \longrightarrow \dot{r}=\frac{na}{r}\sqrt{(a^2e^2-(r-a)^2)}$$

Bu denklemi çözmek için eksantrik anomali (E) adını verdiğimiz yeni bir parametre tanımlamaya ihtiyacımız olacak.

$$r=a(1-e\cos(E))$$

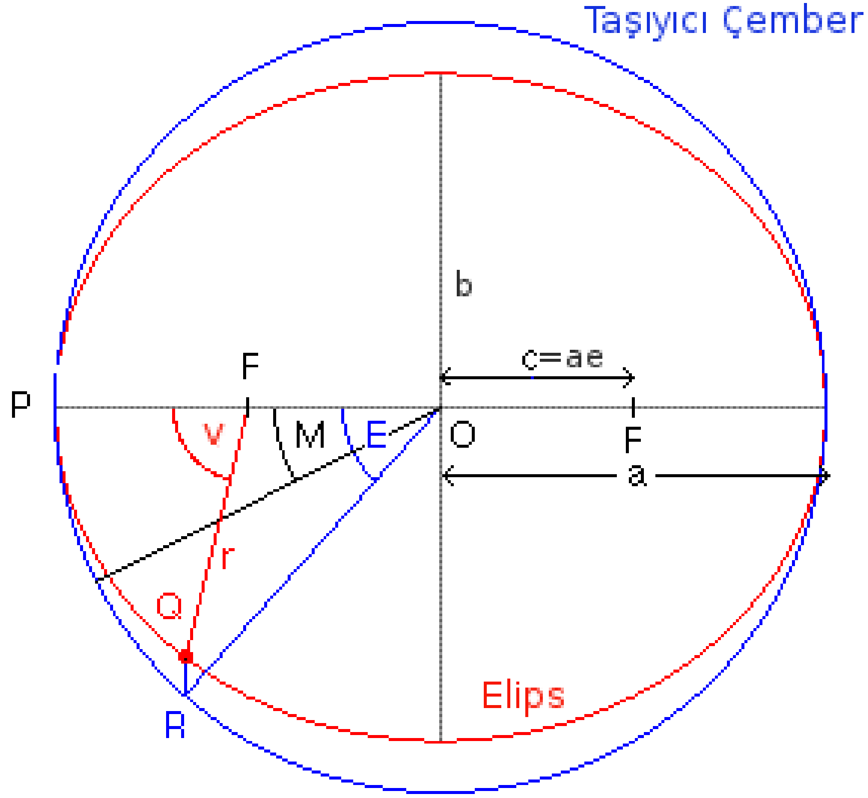
Çözmemiz gereken denklemi r yerine E cinsinden yazacak olursak;

$$E=\frac{M}{(1-e\cos(E))}$$

M: ortalama anomali

$f(t-T_0) = E - e\sin E$ şeklindeki ifade ve tam katları; $M = n(t-T_0)$ (n bir tam sayı olmak üzere) için bu denklemi çözer.

Ortalama (M) ve Eksantrik Ayrıklık (Anomali)



Kepler Denkleminin Çözümü

$t = T_0$ (enberi geçişi) ve $\nu = 0$ alınırsa $M = 0$
$t = T_0 + T / 2$ ve $\nu = \pi$ için ise $M = \pi$, yani $M = E - e\sin E$

Bu ifade analitik olarak çözülemez ve şu şekilde bir yol izlenir.

1) M bulunur $$M = n(t - T_0)$$

2) M kullanılarak E bulunur $$M = E - e\sin(E)$$

3) E kullanılarak r'ye geçilir. $$r = a(1 - e\cos(E))$$

4) ν (gerçek anomali) $$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\nu)}$$

Bu algoritma size tam çözümü verecektir. Algoritmanın ikinci basamağı sadece nümerik olarak çözülebilir. Ayrıntı için bkz. Danby (1988).