SAB 101 OLASILIK
DERS NOTLARI

Prof.Dr. Fatih TANK

Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi
Sigortacılık ve Aktüerya Bilimleri Bölümü

Haftalık öğrenim kazanımları

1. Olasılık ölçüsü,
2. Olasılık uzayı
3. Bağımsız olay
4. Tam Bağımsız Olay

Olasılık Ölçüsü

Tanım (Olasılık Ölçüsü)

U, Ω'da bir σ- cebir olsun. Bir

$$\begin{aligned} P : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longrightarrow P(A) \end{aligned}$$

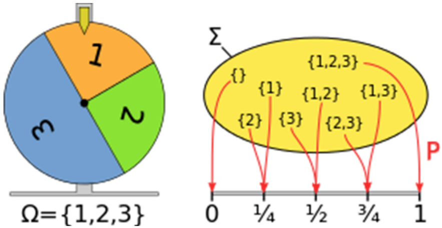
fonksiyonu

i. $\forall A \in U$ için $P(A) \geq 0$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ler U'da ayrık olaylar $\Longrightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

özelliklerine sahip olduğunda, P fonksiyonuna olasılık öçüsü denir. $P(A)$ değerine A olayının olasılık ölçüsü ya da kısaca A'nın olasılğı denir.



Olasılık Uzayı

Tanım (Olasılık Uzayı)

U, Ω'da bir σ- cebir ve P, U'da bir olasılık ölçüs olmak üzere (Ω, U, P) üçlüsüne **olasılık uzayı** denir.

Teorem

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $A_1, A_2, ..., A_n$*ler* U*'da ayrık kümeler* $\Longrightarrow P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{n} A_n\right) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
4. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
5. $0 \leq P(A) \leq 1$
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *ya da genel olarak* $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum\limits_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^n P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$
7. $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{n} A_n\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$ *ve* $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
8. $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ... \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ *ve*
9. $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ... \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

Olasılık Uzayı

Kanıt.

□

Bağımsız Olay

Tanım (Bağımsız Olay)

(Ω, U, P) bir olasılık uzayında, $A, B \in U$ olayları için

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

oluyorsa, A ve B olaylarına **bağımsız olaylar** denir.

Teorem

(Ω, U, P) bir olasılık uzayında $P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$ olsun. A ile B ayrık $\Rightarrow$ A ile B bağımsız değildir.

Sonuç

A ile B bağımsız $\Rightarrow$ A ile B ayrık değil

Teorem

(Ω, U, P) bir olasılık uzayında, A ile B bağımsız ise

1. *$\overline{A}$ ile B bağımsızdır*
2. *A ile $\overline{B}$ bağımsızdır*
3. *$\overline{A}$ ile $\overline{B}$ bağımsızdır*

Kanıt.

□

Tam Bağımsız Olay

- $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ $(1 \leq i < j \leq n)$ olduğunda $A_1, A_2, ..., A_n$ olaylarına ikili bağımsız
- $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$ $(1 \leq i < j < k \leq n)$ olduğunda $A_1, A_2, ..., A_n$ olaylarına üçlü bağımsız

  $\vdots$
- $P(A_i \cap A_j \cap ... \cap A_n) = P(A_i)P(A_j)...P(A_n)$ olduğunda $A_1, A_2, ..., A_n$ olaylarına n'li bağımsız denir.

Tanım (Tam Bağımsız Olay)

$A_1, A_2, ..., A_n$ olayları ikili, üçlü, ..., n'li bağımsız olduklarında bu olaylara **tam bağımsız** denir.