SAB 101 OLASILIK

DERS NOTLARI

Prof.Dr. Fatih TANK

Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi
Sigortacılık ve Aktüerya Bilimleri Bölümü

Haftalık öğrenim kazanımları

1. Kesikli düzgün dağılım,
2. Bernoulli dağılımı,
3. Binom dağılımı

Kesikli Düzgün Dağılım

Tanım (Kesikli Düzgün Dağılım)

Bir Xrasgele değiskeni aldığı değerleri esit olasılıkla alıyorsa düzgün dağılıma sahiptir denir. Düzgün dağılıma sahip bir X rasgele değiskeninin aldığı değerler $x = x_1, x_2, ..., x_n$ olmak üzere

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{n}\ , x = x_1, x_2, ..., x_n, \ (x_1 < x_2 < ... < x_n)}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x < x_1 \\ \frac{i}{n} & , \quad x_i \le x < x_{i+1}\ , i = 1, 2, ..., n-1 \\ 1 & , \quad x \ge x_n \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - (EX)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}$$

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x} e^{tx} f(x) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} \frac{1}{n} = \frac{e^{tx_1} + e^{tx_2} + e^{tx_3} + ... + e^{tx_n}}{n}\ , t \in \mathbb{R}$$

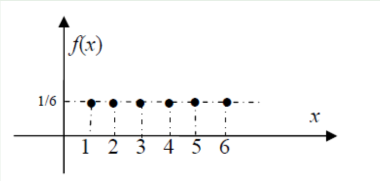
olmaktadır.
Özel olarak $f(x) = \frac{1}{n}\ , x = 1, 2, ..., n$ alınırsa $E(X) = ... = \frac{n+1}{2}$ ve $Var(X) = ... = \frac{n^2-1}{n}$ olur

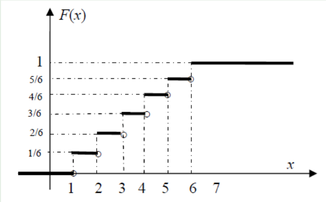
Kesikli Düzgün Dağılım

Örnek

Düzgün bir zarın atılması deneyinde üste gelen noktaların sayısı X olsun.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{6}, x = 1, 2, \ldots, 6 \\
F(x) &= \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1/6 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 2/6 & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 3/6 & , \quad 3 \leq x < 4 \\ 4/6 & , \quad 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & , \quad 5 \leq x < 6 \\ 1 & , \quad x \geq 6 \end{cases} \\
E(X) &= \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3,5 \\
Var(X) &= \frac{n^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2,9167 \\
\sigma_X &= \sqrt{\frac{35}{12}} = 1,7078
\end{aligned}
$$





Bernoulli Dağılım

Tanım (Bernoulli Dağılımı)

Bir deneydeki sonuçlar basarı (p) ya da basarısızlık ($q = 1 - p$) olarak nitelendirildiğinde, böyle deneylere iki tür sonuçlu deney, Bernoulli deneyi veya Bernoulli denemesi denir. X rasgele değiskeninin aldığı değerler 0 veya 1 olmak üzere

$$\boxed{f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0,1}$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ q & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{E(X) = \sum x f(x) = 0.q + 1.p = p}$$

$$\boxed{E\left(X^2\right) = \sum x^2 f(x) = 0^2.q + 1^2 p}$$

$$\boxed{Var(X) = E\left(X^2\right) - (EX)^2 = p - p^2 = p(1-p)}$$

$$\boxed{M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_x e^{tx} f(x) = e^{t0} q + e^{t1} p = q + pe^t = 1 - p + pe^t}$$

olmaktadır. $(0 < p < 1)$

Binom Dağılım

Tanım (Binom Dağılımı)

Başarı olasılığı p olan bir bernoulli denemesi aynı şartlar altında bağımsız olarak n (sonlu) kez tekrarlansın. X rasgele değiskeni n denemede elde edilen başarı sayısı olarak tanımlansın. Bu durumda X'in dağılımına binom dağılımı denir ve $X \sim b(n,p)$ biçiminde gösterilir.

$$\boxed{f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, ..., n}$$

$$\boxed{E(X) = \sum x f(x) = ... = np}$$

$$\boxed{E\left(X^2\right) = np(1-p) + n^2p^2}$$

$$\boxed{Var(X) = E\left(X^2\right) - (EX)^2 = ... = np(1-p)}$$

$$\boxed{M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_x e^{tx} f(x) = ... = \left(q + pe^t\right)^n}$$

olmaktadır. $(0 < p < 1)$

Binom Dağılımı

Örnek

Düzgün bir paranın üç kez atılışında $\Omega = \{YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT\}$ olmak üzere, X r.d. üç atışta gelen turaların sayısı olsun. Bu durumda $X \sim b(n = 3, p = \frac{1}{2})$ olur.

$$f(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \quad , x = 0, 1, 2, 3$$

x	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1/8 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

$$E(X) = np = 3.\frac{1}{2} = 1,5$$

$$Var(X) = npq = 3.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 0,75$$