

SAB 101 OLASILIK

DERS NOTLARI

Prof.Dr. Fatih TANK

Ankara Üniversitesi
Uygulamalı Bilimler Fakültesi
Sigortacılık ve Aktüerya Bilimleri Bölümü



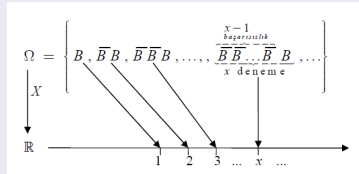
Haftalık öğrenim kazanımları

- 1 Geometrik dağılım,
- 2 Negatif Binom dağılımı,

Geometrik Dağılım

Tanım (Geometrik Dağılım)

Basarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesi, aynı şartlar altında, bağımsız olarak bir başarı elde edinceye kadar tekrarlınsın. Yapılan deneme sayısı X rasgele değişkeni olsun.



olmak üzere X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = P(\underbrace{\bar{B}\bar{B}\dots\bar{B}}_{n-1 \text{ tane}} B) = \underbrace{P(\bar{B}) P(\bar{B}) \dots P(\bar{B})}_{n-1 \text{ tane}} P(B) = q^{x-1}p, (x = 1, 2, \dots)$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{j=1}^x q^{j-1}p = 1 - q^x, (x = 1, 2, \dots)$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx}f(x) = \dots = \frac{pe^t}{1-qe^t}, qe^t < 1, t < -\ln q$$

$$E(X) = \left. \frac{dM_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dots = \frac{1}{p}, E(X^2) = \left. \frac{d^2M_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \dots = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{q}{p^2}$$

olmaktadır.

Geometrik Dağılım

Örnek

Bir atıcı için belli bir hedefi vurması olasılığının $p=0,75$ olduğu bilinsin. Atıcı, hedef bir isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır.

- Hedefi 4 atıştan önce vurması olasılığı ?
- En az 3 atış yapması olasılığı nedir?
- 10 atış yaptığı bilindiğinde bundan sonra en az 3 atış yapması olasılığı nedir?
- Amacına yanında bulunan 2 mermi ile ulaşması olasılığı nedir?
- Hedefin değeri 200 TL ve bir atışın maliyeti 100 TL olduğuna göre, böyle bir oyunda kazancın beklenen değeri nedir ? Kazancın olasılık dağılımı nedir?
- Oyunun dürüst olması için hedefin değeri ne olmalıdır?

Çözüm

Hedef bir isabet alıncaya kadar yapılan atış sayısı X rasgele değişkeni olsun. X Geometrik Dağılıma sahiptir.

$$f(x) = q^{x-1}p = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} \frac{3}{4}, x = 1, 2, \dots$$

a) Hedefi 4 atıştan önce vurması olasılığı:

$$P(X < 4) = f(1) + f(2) + f(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^1 \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{4} = \frac{63}{64}$$

b) En az 3 atış yapması olasılığı:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - f(1) - f(2) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{1}{16}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{1}{16}$$

Geometrik Dağılım

Çözüm

c) 10 atış yaptığı bilindiğinde bundan sonra en az 3 atış yapması olasılığı

$$P(X \geq 13 | X > 10) = \frac{P(X \geq 13)}{P(X > 10)} = \frac{P(X \leq 12)}{P(X \leq 10)} = \frac{1 - F(12)}{1 - F(10)} = \frac{q^{12}}{q^{10}} = q^2 = \frac{1}{16}$$

d) Amacına yanında bulunan 2 mermi ile ulaşması olasılığı

$$P(X \leq 2) = f(1) + f(2) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{16}$$

e) Kazanç = $K = 200 - 100X$

$$E(K) = 200 - E(X) = 200 - 100 \cdot \frac{4}{3} = \frac{200}{3}$$

k	100	0	-100	-200	-300	...
$f(k)$	$3/4$	$3/16$	$3/64$	$3/256$	$3/1024$...

f) Oyunun dürüst olması için kazancın beklenen değeri 0 olmalıdır. $K = a - 100X$ 'den $E(K) = 0$ olmalı

$$\begin{aligned} 0 &= a - 100E(x) \\ &= a - \frac{400}{3} \implies a = \frac{400}{3} \end{aligned}$$

Negatif Binom Dağılımı

Tanım (Negatif Binom Dağılımı)

Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesinin aynı şartlar altında bağımsız olarak k başarı elde edinceye kadar yapılması deneyini göz önüne alınsın. X rasgele değişkeni, k başarı elde edilinceye kadar yapılan denemelerin sayısının dağılımı Negatif Binom Dağılımıdır.

$$f(x) = \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} p^k, (x = k, k+1, k+2, \dots)$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=k}^{\infty} e^{tx} \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} p^k = \dots = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t} \right)^k, t < -\ln q$$

$$E(X) = \left. \frac{dM_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dots = \frac{k}{p}, E(X^2) = \left. \frac{d^2M_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \dots = \frac{k(k+q)}{p^2}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{kq}{p^2}$$

Örnek

Bir atıcı için belli bir hedefi vurması olasılığının $p=0,75$ olduğu bilinsin. Atıcı, hedef 3 isabet alıncaya kadar atış yapmaya karardır.

- Hedefi 4 atıştan önce vurması olasılığı ?
- En az 3 atış yapması olasılığı nedir?
- 10 atış yaptığı bilindiğinde bundan sonra en az 3 atış yapması olasılığı nedir?
- Amacına yanında bulunan 2 mermi ile ulaşması olasılığı nedir?
- Hedefin değeri 200 TL ve bir atışın maliyeti 100 TL olduğuna göre, böyle bir oyunda kazancın beklenen değeri nedir ? Kazancın olasılık dağılımı nedir?
- Oyunun dürüst olması için hedefin değeri ne olmalıdır?

Çözüm

Hedef 3 isabet alıncaya kadar yapılan atış sayısı X rasgele değişkeni olsun. X Negatif Binom Dağılımına sahiptir.

$$a) \quad P(X = 4) = \binom{4-1}{3-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{4-3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{81}{256}$$

$$b) \quad P(X \leq 4) = f(3) + f(4) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{4-1}{3-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{4-3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{189}{256}$$

$$c) \quad P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - f(3) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{148}{256}$$

$$d) \quad P(X \leq 5) = \dots = \frac{459}{512}$$

$$e) \quad K = 200 - 100X \implies E(K) = 3 * 200 - 100E(X) = 600 - 100.4 = 200$$

k	200	100	0	-100	-200	...
$f(k)$	108/256	81/256	81/512	135/2048	567/16384	...

$$f) \quad K = 3a - 100X \implies 0 = 3a - 100E(X) \implies a = \frac{400}{3}$$