BÖLÜM 6

BEKLENEN DEĞER VE VARYANS

X rastgele değişken olmak üzere;

1) Kesikli X rastgele değişkeni için $E(X)=\sum_{x\in D_X} xf_X(x)$ değerine $\sum_x |x| f(x)<\infty$ olduğunda

2) Sürekli X rastgele değişkeni için $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$ değerine $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx<\infty$ olduğunda

X rastgele değişkeninin 'beklenen değeri' denir.

$E(X-a)^k$ sayısına X rastgele değişkenin a noktasına göre $k.momenti$ denir.
$a=E(X)$ ve $k=2$ olarak alınırsa $E(X-E(X))^2$ olur. $E(X-E(X))^2$ sayısına X rastgele değişkeninin 'varyansı' denir ve $E(X-E(X))^2=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$ dir. Varyans $Var(X)$, σ_X^2 ' şeklinde gösterilir.

Beklenen değer ve varyansın bazı özellikleri:

- $E(c)=c \quad (c\rightarrow sabit)$
- $E(X\mp c)=E(X)\pm c \quad (c\rightarrow sabit)$
- $E(cX)=cE(X) \qquad (c\rightarrow sabit)$
- $E(aX+b)=aE(X)+b \quad (a,b\rightarrow sabit)$

Varyans için:

- $Var(c)=0 \qquad (c\rightarrow sabit)$
- $Var(X+c)=Var(X)$
- $Var(aX+b)=a^2Var(X) \qquad (a,b\rightarrow sabit)$
- $Var(cX)=c^2Var(X)$
-

Örnek: X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x=1,2,3,4\\ 0, & d.y.\end{cases}$$

şeklindedir. Olasılık fonksiyonunun beklenen değer ve varyansını bulunuz.

$X=x$	1	2	3	4
$P(X=x)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X)=\sum_{x=1}^{4} xP(X=x)$$
$$=1\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{4}+4\frac{1}{4}$$
$$=\frac{10}{4}$$

X rastgele değişkeninin varyansı

$$Var(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{4} x^2P(X=x)=1^2\frac{1}{4}+2^2\frac{1}{4}+3^2\frac{1}{4}+4^2\frac{1}{4}=\frac{30}{4}$$
$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=\frac{30}{4}-\left(\frac{10}{4}\right)^2=\frac{20}{16}=1{,}25$$

Örnek: X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0 & , dy\end{cases}$$
$$E(X)=\int_0^2 x f_X(x)dx \Rightarrow \int_0^2 x\frac{3}{8}x^2dx=\left[\frac{3}{8}.\frac{16}{4}\right]-0=\frac{3}{2}$$
$$E(X^2)=\int_0^2 x^2 f_X(x)=\frac{3}{8}.\frac{32}{5}=\frac{12}{5}$$
$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=\frac{12}{5}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{12}{5}-\frac{9}{4}=\frac{3}{20}$$

$$P(a<X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X<b)=P(a\le X\le b)=\int_a^b f_x(x)dx=F(b)-F(a)$$

Örnek: Bir X rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}cx & , \quad 0<x<2\\ 0 & , \quad d.y\end{cases}$$

a) f fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için c sabiti ne olmalıdır?

bir f fonksiyonunun olasılık yoğunlukn fonksiyonu olması için aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \end{array}\right\}$$

$\int_0^2 f(x)dx = 1$ olmalı

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 cxdx = c\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{c}{2}(2^2 - 0) \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

b) f olasılık yoğunluk fonksiyonunun dağılım fonksiyonunu bulunuz.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f_X(x)dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^x = \frac{1}{4}x^2$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \ , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2 \ , \ 0 < x < 2 \\ 1 \ , \ x \geq 0 \end{cases}$$

c) $P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} f_X(x)dx = \int \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0\right] = \frac{1}{16}$

d) $P(1/4 < X < 3/2) = \int_{\frac{1}{4}}^{3/2} f_X(x)dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^{3/2} \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}\Big|_{1/4}^{3/2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}{4} = \frac{\frac{36-1}{16}}{4} = \frac{35}{16}.\frac{1}{4} = \frac{35}{64}$

e) $P(X = 1) = 0$

f) Beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

$$E(X)=\int_0^2 x f_X(x)dx=\int_0^2 x\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$E\left(X^2\right)=\int_0^2 x^2\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{2}.\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=\frac{16}{8}=2$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

g) $Var(3X+5)=9Var(X)=9\times\frac{2}{9}=2$

$$E(3X+5)=3E(X)+5=3\times\frac{4}{3}+5=9$$

Örnek: X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases} cx\ , & x=1,3,4 \\ 0\ , & d.y. \end{cases}$$

şeklinde olsun.

a) $f(x)$ fonksiyonunun olasılık fonksiyonu olması için c sabiti ne olmalıdır?
X rasgele değişkeni kesiklidir.

$X=x$	1	3	4
$P\left(X=x\right)$	c	$3c$	$4c$

$f(x)$ fonksiyonunun olasılık fonksiyonu olabilmesi için

1. $f_X(x_i)\geq 0 \qquad i=1,2,.....,n$
2. $\sum_{i=1}^{n} f_X(x_i)=1$

olmalıdır.

$$c+3c+4c=1\Rightarrow c=\frac{1}{8}$$

olur . Bu durumda

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{8}\ , & x=1,3,4 \\ 0\ , & d.y. \end{cases}$$

olasılık fonksiyonu elde edilir.

$X=x$	1	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$

b) X rasgele değişkeninin $F(x)$ dağılım fonksiyonunu bulunuz.

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , \ x<1 \\ \frac{1}{8}\ , \ 1\le x<3 \\ \frac{4}{8}\ , \ 3\le x<4 \\ 1\ , \ x\ge 4 \end{cases}$$

c) Beklenen değer ve varyansını hesaplayınız.

X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X)=\sum_{x\in D_X} xP(X=x)$$
$$=1\frac{1}{8}+3\frac{3}{8}+4\frac{4}{8}+$$
$$=\frac{26}{8}$$

X rastgele değişkeninin varyansı

$$Var(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$E(X^2)=\sum_{x\in D_X} x^2P(X=x)=1^2\frac{1}{8}+3^2\frac{3}{8}+4^2\frac{4}{8}=\frac{92}{8}$$
$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$$
$$=\frac{92}{8}-\left(\frac{26}{8}\right)^2=\frac{736}{64}-\frac{676}{64}=\frac{60}{64}=\frac{15}{16}$$

d) $Var(2X+5)=?$

$$Var(2X+5)=4Var(X)=4\times\frac{15}{16}=\frac{15}{4}$$

$$E(2X+5)=2E(X)+5=2\times\frac{26}{8}+5=\frac{13}{2}+\frac{10}{2}=\frac{23}{2}$$
$$P(X\ge 2)=P(X=3)+P(X=4)=\frac{3}{8}+\frac{4}{8}=\frac{7}{8}$$

KAYNAKLAR

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html