BÖLÜM 8

NORMAL DAĞILIM

Önemli bir dağılım olmasının nedenlerinden biri yapılan bir çok gözlem sonucunun dağılımının bu yapıya benzemesi ve çoğu dağılımın da gözlem sayısı arttıkça normal dağılıma yaklaşmasıdır. X sürekli rastgele değişkeni normal dağılıma sahip ise X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

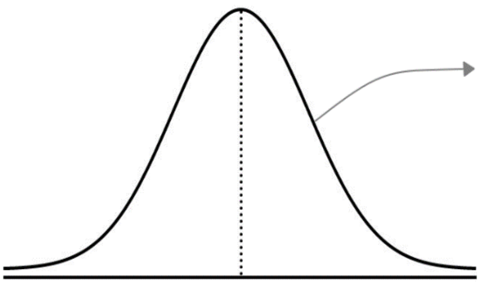
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\quad,\qquad \begin{array}{l} -\infty<x<\infty \\ -\infty<\mu<\infty \\ \sigma^2>0 \end{array}$$

$$E(x)=\mu\ ,\quad Var(x)=\sigma^2$$

Örnek;

$$\mu=10,\ \sigma^2=16$$

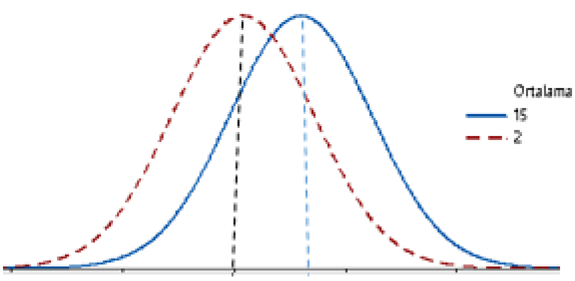
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi 4}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-10)^2}{16}}\quad,\qquad \begin{array}{l} -\infty<x<\infty \\ -\infty<\mu<\infty \\ \sigma^2>0 \end{array}$$



$\sigma^2=16$

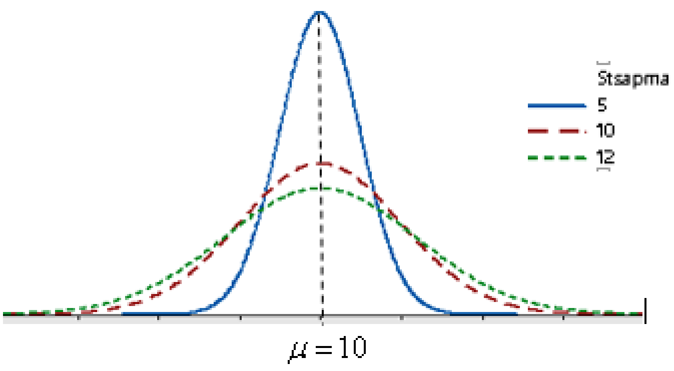
$-\infty$ $\qquad\mu=10\qquad$ $+\infty$

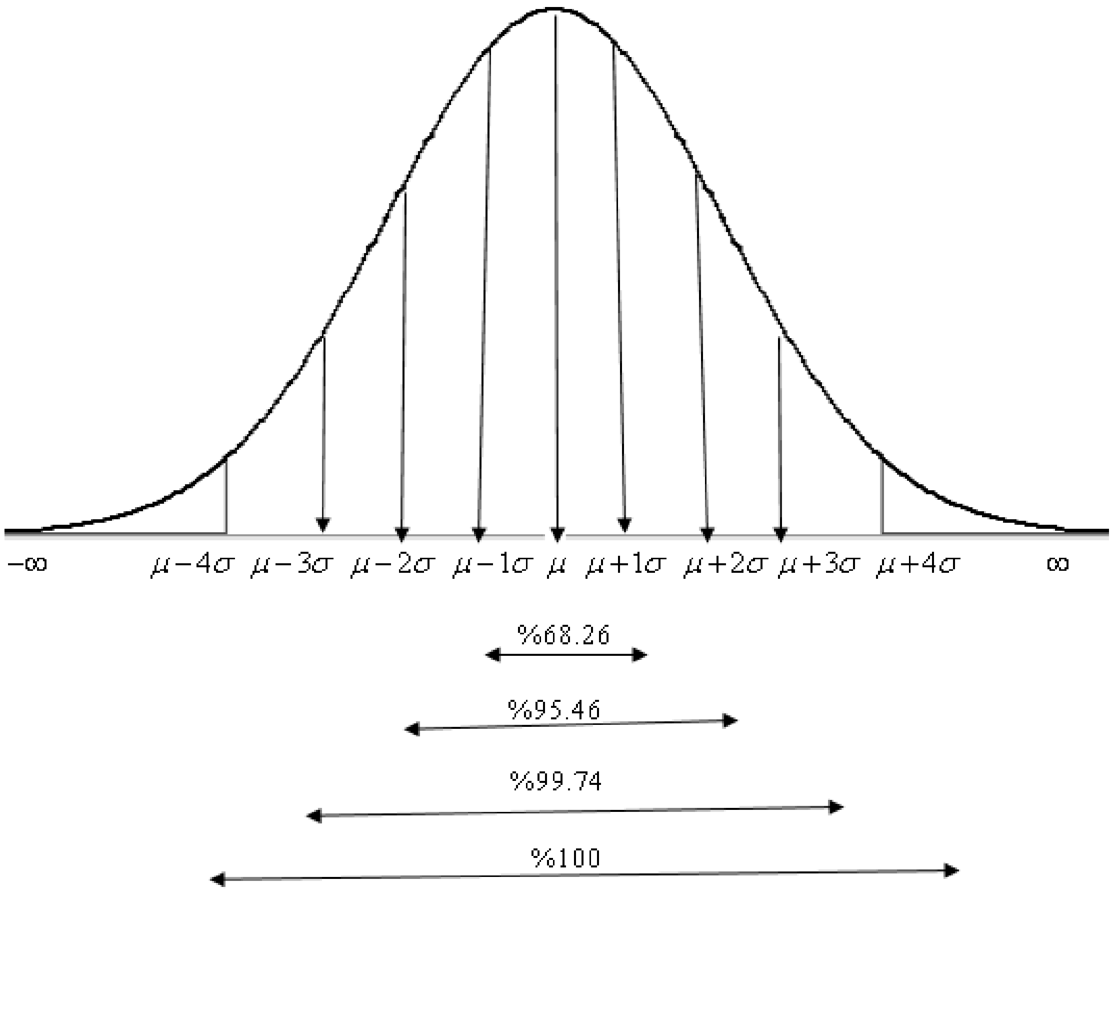
=>Ortalama değiştiği sürece; $\sigma^2=16$



$\mu=2\qquad\mu=10$

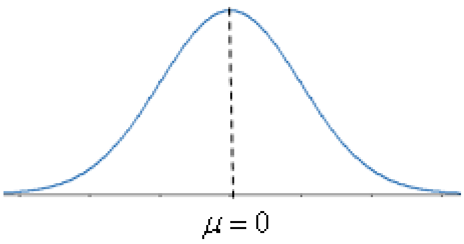
=>Varyans değiştiği sürece;





$P(X < \mu) = 0.5$

$\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$ olan normal dağılıma standart normal dağılım denir. Standart normal dağılıma sahip rasgele değişken genellikle Z harfi ile gösterilir.



$Z \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ standart normal dağılıma sahiptir denir.

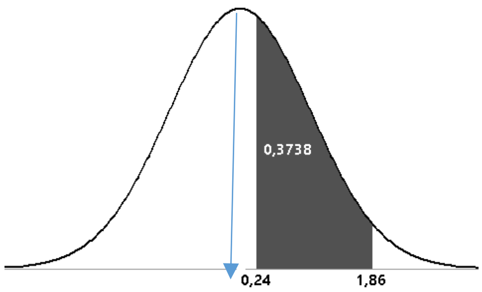
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahip rasgele değişken olmak üzere $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ rasgele değişkeni standart normal dağılıma sahip bir rasgele değişkendir .
- Standart normal dağılıma sahip Z rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonsiyonu;

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty < z < \infty$$

Örnek: Standart normal dağılıma sahip Z rasgele değişkeni için aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

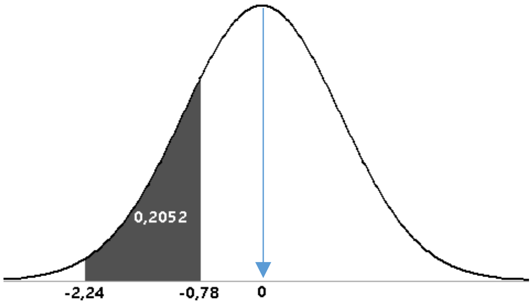
a) $P(0.24 < Z < 1.86) = ?$

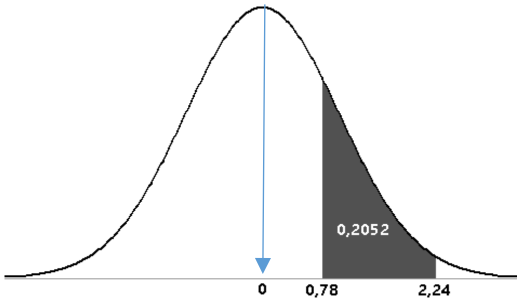
$$P(0.24 < Z < 1.86) = P(Z < 1.86) - P(Z < 0.24)$$
$$= 0.9686 - 0.5948 = 0.3738$$



b) $P(-2.24 < Z < -0.78) = ?$

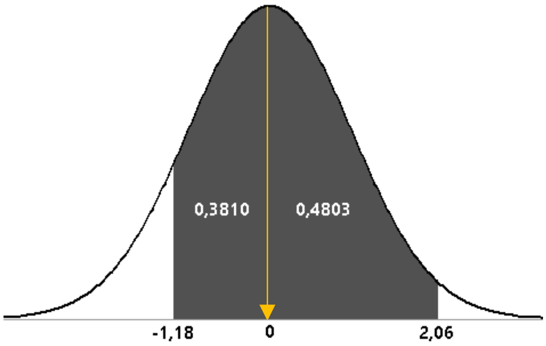
$$P(-2.24 < Z < -0.78) = P(0.78 < Z < 2.24)$$
$$= P(Z < 2.24) - P(Z < 0.78)$$
$$= 0.9875 - 0.7823 = 0.2052$$

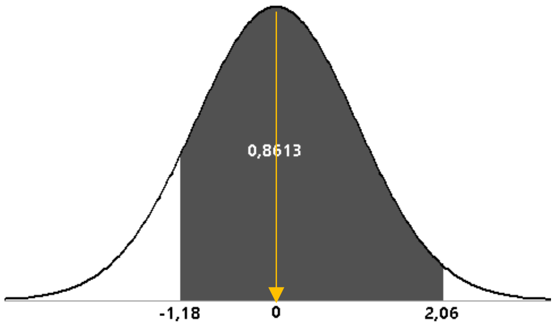


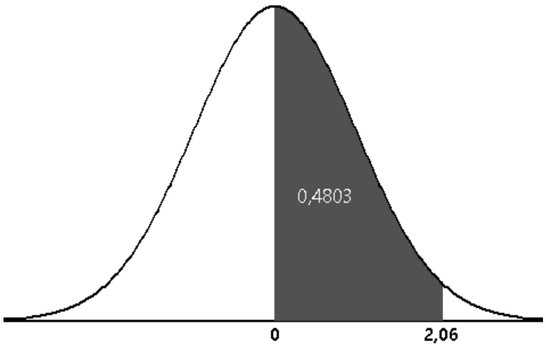


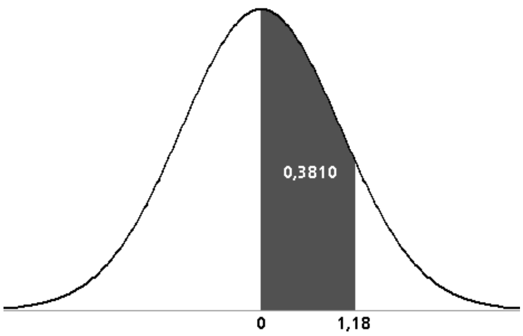
c)

$$
\begin{aligned}
P(-1.18 < Z < 2.06) &= P(0 < Z < 2.06) + P(0 < Z < 1.18) \\
&= \left[P(Z < 2.06) - P(Z < 0)\right] + \left[P(Z < 1.18) - P(Z < 0)\right] \\
&= (0.9803 - 0.5) + (0.8810 - 0.5) \\
&= 0.4803 + 0.3810 = 0.8613
\end{aligned}
$$

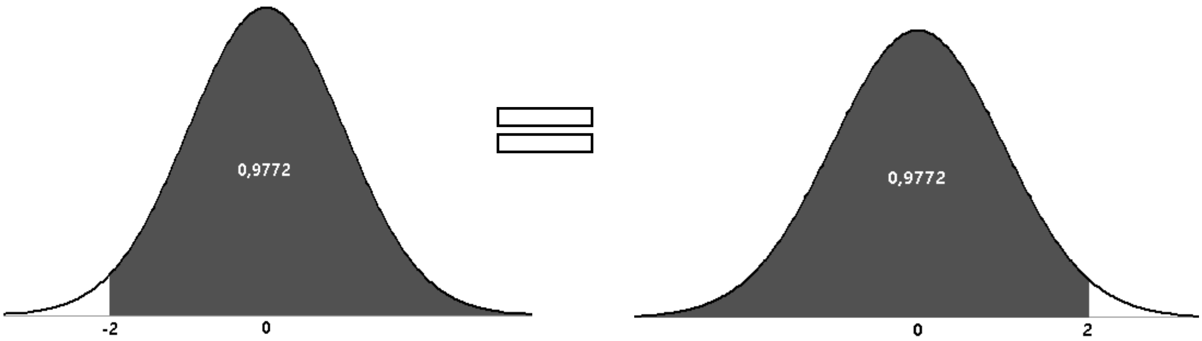




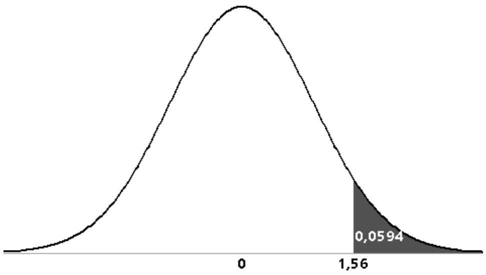




d) $P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$



d) $P(Z > 1.56) = 1 - P(Z < 1.56) = 1 - 0.9406 = 0.0594$



Örnek:

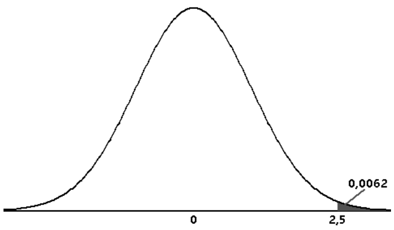
Belli bir tür bitkinin yaşam süresi $N(\mu = 35, \sigma^2 = 16)$ olan dağılıma sahip olduğu bilinmektedir.

$X \rightarrow$Bitkinin yaşam süresi

$X \sim N\ (\mu = 35\ , \sigma^2 = 16)$

a) Rastgele seçilen bir bitkinin yaşam süresinin 45 günden çok olma olasılığı nedir?

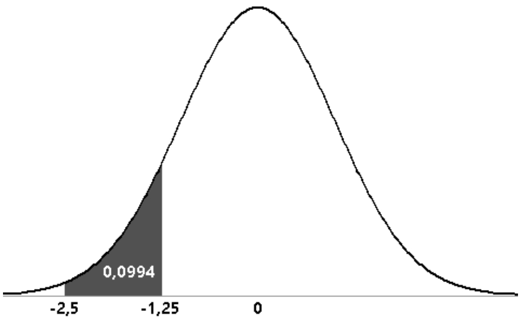
$$P(X > 45) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{45-35}{4}) = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z \le 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

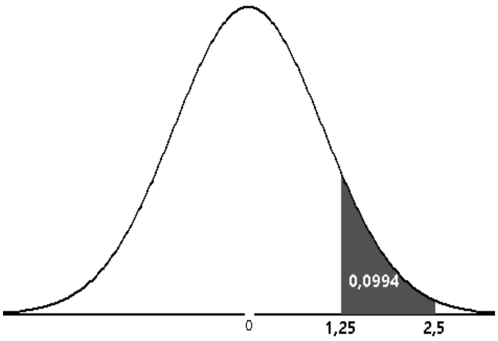


b) Aynı tür bitki için alınan 10.000 örnekten kaç tanesinin yaşam süresi 45 günden fazladır?

$10000 \times 0.0062 \Rightarrow 62$ tanesi c)

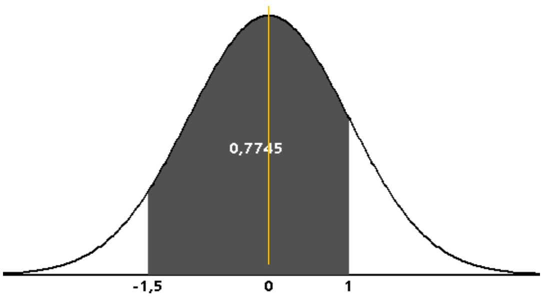
$$P(25 < X < 30) = P\left(\frac{25-35}{4} < Z < \frac{30-35}{4}\right)$$
$$= P\left(\frac{-10}{4} < Z < \frac{-5}{4}\right)$$
$$= P(-2.5 < Z < -1.25)$$
$$= P(1.25 < Z < 2.5)$$
$$= P(Z < 2.5) - P(Z < 1.25)$$
$$= 0.9938 - 0.8944 = 0.0994$$

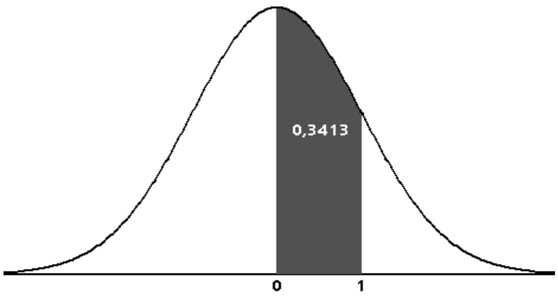


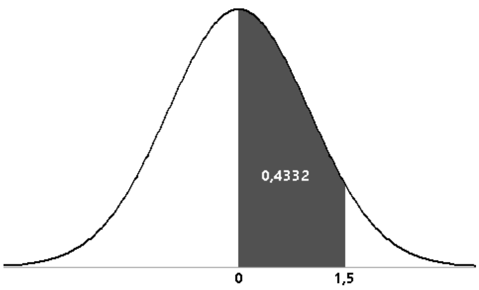


d)

$$P(29 < X < 39) = P\left(\frac{29-35}{4} < Z < \frac{39-35}{4}\right)$$
$$= P\left(\frac{-6}{4} < Z < \frac{4}{4}\right) = P(-1.5 < Z < 1)$$
$$= P(0 < Z < 1) + P(0 < Z < 1.5)$$
$$= [P(Z < 1) - P(Z < 0)] + [P(Z < 1.5) - P(Z < 0)]$$
$$= (0.8413 - 0.5) + (0.9332 - 0.5) = 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$$







d)Bitkinin %20' sinin yaşam süresi hangi değerin üzerindedir.

$$P(X > a) = 0.20$$

$$P(Z > \frac{a-35}{4}) = 0.20$$

$$P(Z \le \frac{a-35}{4}) = 0.80$$

$$\frac{a-35}{4} = 0.84 \Rightarrow a = 0.84 \times 4 + 35 \Rightarrow a = 38.36$$

Örnek:

Bir yaşındaki çocukların ağırlıklarının kg olarak dağılımı $N(\mu = 13, \sigma^2 = 4)$ olarak varsayılıyor.

a)Rastgele seçilen bir çocuğun ağırlığının 17 kg'dan fazla olma olasılığı?

b) $P(12 < X < 14)$

c)Seçilen 100 çocuktan kaç tanesinin ağırlıkları 12 ile 14 kg arasındadır?

Çözüm:

$$P(X > 17) = P(Z > \frac{17-13}{2})$$

$$= P(Z > 2) = 1 - P(Z \le 2)$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$b) P\left(\frac{12-13}{2} < Z < \frac{14-13}{2}\right) = P(-0.5 < Z < 0.5)$$

$$= 2P(0 < Z < 0.5)$$

$$= 2\left[P(Z < 0.5) - P(Z < 0)\right]$$

$$= 2(0.6915 - 0.5) = 0.383$$

c) $0.383 \times 100 = 38.3$

d) Çocukların %25'nin ağırlığı hangi değerin altındadır.

$$P(X < a) = 0.25$$

$$P(Z < \frac{a-13}{2}) = 0.25$$

$$\frac{a-13}{2} = -0.675 \Rightarrow a = -0.675 \times 2 + 13 = 11.65$$

e) Cocukların %30'u hanği değerin altındadır.

$$P(X < a) = 0.30$$

$$P(Z < \frac{a-13}{2}) = 0.30$$

$$\frac{a-13}{2} = -0.52 \Rightarrow a = -0.52 \times 2 + 13 = 11.96$$

f) Çocukların % 80'ninin ağırlıkları hangi değerin altındadır.

$$P(X < a) = 0.80$$

$$P(Z < \frac{a-13}{2}) = 0.80$$

$$\frac{a-13}{2} = 0.84 \Rightarrow a = 0.84 \times 2 + 13 = 14.68$$

g) Çocukların %15'nin ağırlıkları hangi değerlerin üstündedir.

$$P(X > a) = 0.15$$

$$P(Z > \frac{a-13}{2}) = 0.15$$

$$\frac{a-13}{2} = 1.04 \Rightarrow a = 1.04 \times 2 + 13 = 15.08$$

h) Çocukların %80'ninin ağırlıkları hangi değerin üstündedir.

$$P(X > a) = 0.80$$

$$P(Z > \frac{a-13}{2}) = 0.80$$

$$\frac{a-13}{2} = -0.84 \Rightarrow a = -0.84 \times 2 + 13 = 11.32$$

Örnek: Bir fabrika ilaç paketlerini ortalaması 1000 gr varyansı ise 16 gr olan normal dağılıma göre paketlenmektedir. Bu fabrikadan

a) Rasgele olarak bir ilaç paketi alındığında ilaç paketinin 996 gr dan az olması olasılığı.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq 996) &= P\left(\frac{X-1000}{4} \leq \frac{996-1000}{4}\right) \\
&= P(Z \leq -1) = 1 - P(Z < 1) \\
&= 1 - 0.8413 = 0.1587
\end{aligned}
$$

b) Rasgele olarak bir ilaç paketi alındığında bu ilaç paketinin 1008 gr dan fazla olması olasılığı.

$$
\begin{aligned}
P(X > 1008) &= P\left(\frac{X-1000}{4} > \frac{1008-1000}{4}\right) \\
&= P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) \\
&= 1 - 0.9772 = 0.0228
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
P(996 < X < 1004) &= P\left(\frac{996-1000}{4} < Z < \frac{1004-1000}{4}\right) \\
&= P(-1 < Z < 1) = 2P(0 < Z < 1) \\
&= 2\big(P(Z < 1) - P(Z < 0)\big) \\
&= 2(0.8413 - 0.5) = 2 * 0.3413 \\
&= 0.6826
\end{aligned}
$$

KAYNAKLAR

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

   Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

   Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

   Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

   Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html