BÖLÜM 9

ÖRNEKLEME DAĞILIMLARI

Ki-kare (χ^2) Dağılımı:

Tanım: Z_1, Z_2, Z_k rastgele değişkenleri $N(0,1)$ dağılımına sahiptir. Bu rastgele değişkenlerin kareler toplamı ki-kare rastgele değişkenlerini verir. Yani, $\chi^2 = Z_1^{\ 2} + Z_2^{\ 2} + ... + Z_k^{\ 2}$.

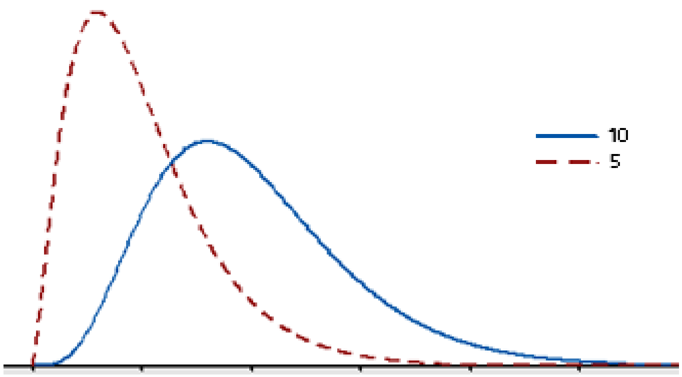
χ^2 rastgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f(u) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} u^{(k/2)-1} e^{-u/2}, \ u > 0$$

χ^2 dağılımının ortalaması ve varyansı

$\mu = k \ , \quad \sigma^2 = 2k$

k serbestlik dereceli χ^2 dağılımı



χ^2 dağılımının şekli serbestlik derecesine bağlıdır.

$k \to \infty$*'da* χ^2 *dağılımı normal dağılıma yaklaşır.*

Örnek: $\alpha = 0.05, \ \ k = 10$ olsun. χ^2 tablo değeri

$\chi^2_{tablo} = \chi^2{}_{\alpha:k} \Rightarrow \chi^2{}_{0.05:10} = 18.31$

Örnek: $\alpha = 0.10, \ \ k = 15$ olsun.

$\chi^2_{tablo} = \chi^2{}_{\alpha:k} \Rightarrow \chi^2{}_{0.10:15} = 22.31$

t Dağılımı:

Tanım: $Z \sim N(0,1)$ ve Y, k serbestlik dereceli χ^2 rastgele değişkeni olsun.

Z ve Y rastgele değişkenleri bağımsızdır.

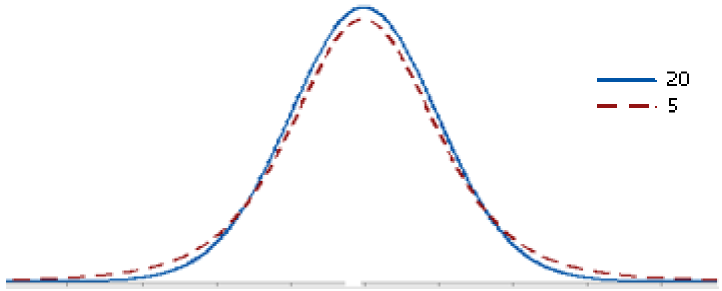
$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$$

T rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

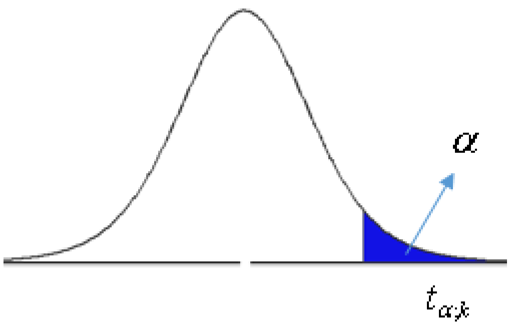
$$f(t)=\frac{\Gamma\left[(k+1)/2\right]}{\sqrt{\pi k}.\Gamma(k/2)}.\frac{1}{\left[(t^2/k)+1\right]^{(k+1)/2}}, \quad -\infty<t<\infty$$

olarak tanımlanır ve k serbestlik dereceli t dağılımı olarak bilinir.

$$\mu=0,\ \sigma^2=\frac{k}{k-2},\ k>2$$



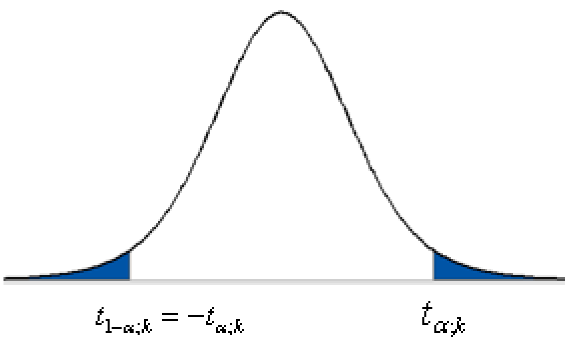
$k\to\infty$ 'a yaklaşırken t dağılımı limit durumunda normal dağılıma yaklaşır. Dağılım sıfır noktasına göre simetriktir.



$\alpha=0.05$

$k=10$

$t_{0.05:10}=1.812$



Örnek:

$\alpha = 0.02$

$k = 18$

$t_{0.02:18} = 2.214$

F Dağılımı:

Tanım: W ve Y, u_1 ve u_2 serbestlik dereceli bağımsız χ^2 rastgele değişkenleri olsun. Bunların oranı;

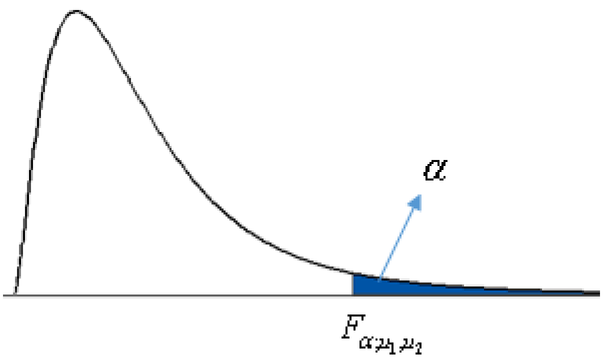
$F = \dfrac{W / u_1}{Y / u_2}$ olarak hesaplanır.

F dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{u_1 + u_2}{2}\right)\left(\dfrac{u_1}{u_2}\right)^{u_1/2} x^{\left(\frac{u_1}{2}\right)-1}}{\Gamma\left(\dfrac{u_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{u_2}{2}\right)\left[\left(\dfrac{u_1}{u_2}\right)x + 1\right]^{(u_1+u_2)/2}}, \quad 0 < x < \infty$$

Ortalaması $\mu = \dfrac{u_2}{(u_2 - 2)}, \quad u_2 > 2$

Varyansı $\sigma^2 = \dfrac{2u_2^2(u_1 + u_2 - 2)}{u_1(u_2 - 2)^2 (u_2 - 4)}, \quad u_2 > 4$



Örnek: $\alpha = 0.05, \quad u_1 = 5, \quad u_2 = 10$

$F_{0.05}: 5{,}10 = 3.33$

$F_{1-\alpha;u_1,u_2} = \dfrac{1}{F_{0.05:u_2,u_1}} = \dfrac{1}{F_{0.05:10,5}} = \dfrac{1}{4{,}74} = 0.211$

Örnek:

$$\alpha = 0.05, \quad u_1 = 9, \quad u_2 = 12$$

$$F_{0.05} : 9,12 = 3.07$$

$$F_{1-\alpha;u_1,u_2} = \frac{1}{F_{0.05:u_2,u_1}} = \frac{1}{F_{0.05:12,9}} = \frac{1}{3.07} = 0.3257$$

KAYNAKLAR

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

   Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

   Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

   Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

   Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html