BÖLÜM 11

2) Kitle varyansı σ^2 bilinmediğinde kitle ortalaması için hipotez testi ve aralık tahmini

$$X_1, X_2, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

$S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$ örneklem varyansını ve $S = \sqrt{S^2}$ örneklem standart sapmasını göstermektedir.

<u>1) Hipotez Testi:</u>

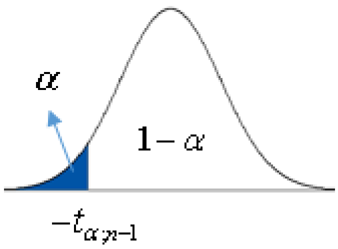
$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$

<u>2)Test İstatistiği:</u>

$$t_t = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

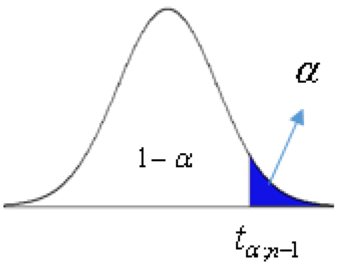
<u>3) Karar Aşaması:</u>

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$



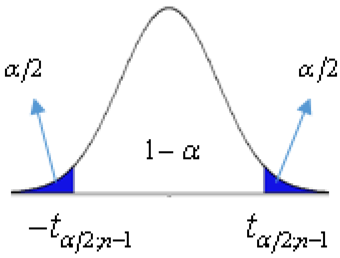
$t_t < -t_{\alpha;n-1}$ olduğunda H_0 hipotezi red edilir

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$



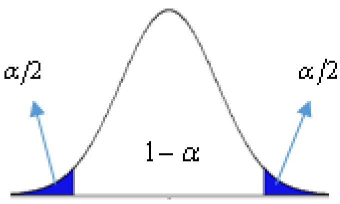
$t_t > t_{\alpha;n-1}$ olduğunda H_0 hipotezi red edilir

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$



$t_t < -t_{\alpha/2;n-1}$ olduğunda
ya da
$t_t > t_{\alpha/2;n-1}$ olduğunda
H_0 hipotezi red edilir

Güven Aralığı



$$P(-t_{\alpha/2;n-1} < t < t_{\alpha/2;n-1}) = 1-\alpha$$

$$P(-t_{\alpha/2;n-1} < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2;n-1}) = 1-\alpha$$

$$P(\bar{X} - t_{\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$

$$\bar{x} \mp t_{\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Not: $n > 30$ olduğunda t dağılımı yerine Z dağılımı kullanılır.

Örnek: Erkeklerde 1 mm^3 kandaki alyuvar sayısının 5.34 milyon olduğu biliniyor. Bir araştırmacı ortalama alyuvar sayısının daha az olduğunu iddia ediyor. Bu iddianın geçerli olup olmadığını %95 güven düzeyinde test ediniz.

4.45	4.75	4.85	4.85	4.95	4.95	5.05	5.15	5.15	5.25
5.25	5.25	5.25	5.25	5.25	5.35	5.35	5.45	5.45	5.45
5.45	5.55	5.55	5.55	5.55	5.65	5.65	5.75	5.95	6.25

Çözüm:

$n = 30, \quad \mu = 5.34$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{n} = \frac{4.45+4.75+...+5.95+6.25}{30} = \frac{159.6}{30} = 5.32$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = (4.45)^2 + (4.75)^2 + ... + (5.95)^2 + (6.25)^2 = 852.975$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{852.975 - 30(5.32)}{30-1}} = 0.367$$

1) Hipotez kurulur.

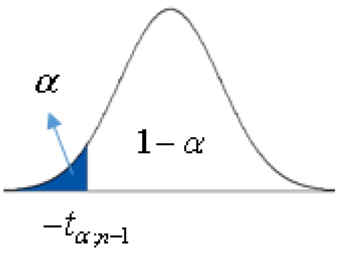
$H_0 : \mu = 5.34$

$H_1 : \mu < 5.34$

2) Test istatistiği

$$t_t = \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{5.32-5.34}{0.367/\sqrt{30}} = -0.299$$

3) Karar



$$-t_{\alpha;n-1} = -t_{0.05;30-1} = -1.699$$

$t_t = -0.299 > -t_{\alpha;\nu} = -1.699$ olduğundan H_0 hipotezi red edilemez.

Yorum: Erkeklerde kandaki ortalama alyuvar sayısının 5.34 milyon/ mm^3 olduğu %95 güven düzeyinde söylenebilir.

Güven aralığı

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$t_{\alpha/2;n-1} = t_{0.025;29} = 2.045 \rightarrow$ t dağılımı tablo değeri

$$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2};n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{\theta}_1 : \bar{x} - t_{\alpha/2:n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} = 5.32 - 2.045 \frac{0.367}{\sqrt{30}} = 5.183$$

$$\hat{\theta}_2 : \bar{x} + t_{\alpha/2:n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} = 5.32 + 2.045 \frac{0.367}{\sqrt{30}} = 5.457$$

%95 düzeyinde güven aralığı; $(5.183; 5.457)$

<u>İki Kitle Ortalaması Arasındaki Fark İçin Güven Aralığı ve Hipotez Testi</u>

$$\left.\begin{array}{l} X_{11}, X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{1n_1} \sim N(\mu_1, \sigma^2) \\ X_{21}, X_{22}, X_{23}, \ldots, X_{2n_2} \sim N(\mu_2, \sigma^2) \end{array}\right\rangle$$ Rastgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsun.

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(\mu_1 : \mu_2,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

Durum 1: σ_1^2 ve σ_2^2 biliniyor

1) Hipotez kurulur

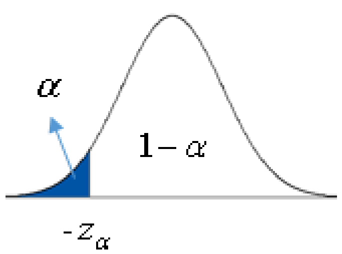
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

2) Test İstatistiği;

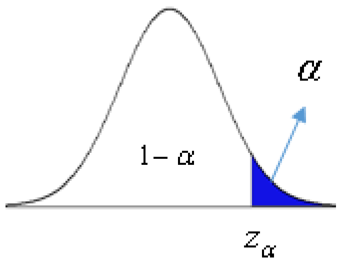
$$Z_t = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

3) Karar aşaması

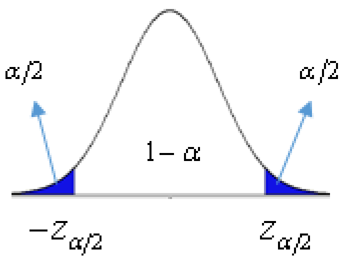
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 < \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 > \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$



$z_t < -z_\alpha$ olduğunda H_0 hipotezi red edilir



$z_t > z_\alpha$ olduğunda H_0 hipotezi red edilir



$z_t < -z_{\alpha/2}$ olduğunda
ya da
$z_t > z_{\alpha/2}$ olduğunda
H_0 hipotezi red edilir

Güven Aralığı;

$$P\left(\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Örnek: İki farklı cins alüminyum direğin basınca dayanıklılığı test edilmek isteniyor.

a) Üretimde kullanılan iki farklı cins alüminyum türünün basınca dayanıklılığı arasında fark olup olmadığını %90 güven düzeyinde test ediniz.

b) %90 güven düzeyinde iki cins alüminyum direğin basınca dayanıklılığını, kitle ortalaması arasındaki fark için güven aralığını bulunuz.

Alüminyum Direk	Örneklem Hacmi	Dayanıklılık Hacmi	Kitle-Varyans
A	$n_1 = 18$	$\bar{x}_1 = 200$	$\sigma_1^2 = 50$
B	$n_2 = 20$	$\bar{x}_2 = 190$	$\sigma_2^2 = 40$

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$$

1) Hipotez kurulur

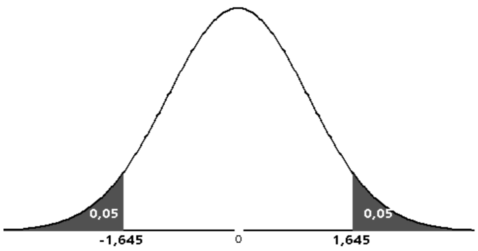
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

2) Test istatistiği

$$Z_t = \frac{\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{200 - 190 - 0}{\sqrt{\frac{50}{18} + \frac{40}{20}}} = \frac{10}{2.186} = 4.575$$

3) Karar



$z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$

$Z_t = 4.575 > z_{0.05} = 1.645$ olduğundan H_0 hipotezi red edilir.

Yorum: iki farklı tür alüminyum direğin basınca dayanıklıkları arasında fark olduğu %95 güven düzeyinde söylenebilir.

b) Güven aralığı

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$$

$$\left(\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$\hat{\theta}_1 : \overline{x}_1 - \overline{x}_2 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = (200-190) - 1.645\sqrt{\frac{50}{18} + \frac{40}{20}} = 6.4057$$

$$\hat{\theta}_2 : \overline{x}_1 - \overline{x}_2 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = (200-190) + 1.645\sqrt{\frac{50}{18} + \frac{40}{20}} = 13.5943$$

%90 güven düzeyinde kitle ortalamasını içeren aralık: $(6.4057; 13.5943)$

KAYNAKLAR

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html