BÖLÜM 12

Durum 2: $\sigma_1^2 \; ve \, \sigma_2^2 \; bilinmiyor.$

$X_{11}, X_{12}, X_{13}, ..., X_{1n} \sim N(\mu_1, \sigma^2)$

$X_{21}, X_{22}, X_{23}, ..., X_{2n} \sim N(\mu_2, \sigma^2)$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Bu durum kendi arasında ikiye ayrılır;

a) σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyor fakat ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

1) Hipotez

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

2) Test istatistiği

$$t_t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

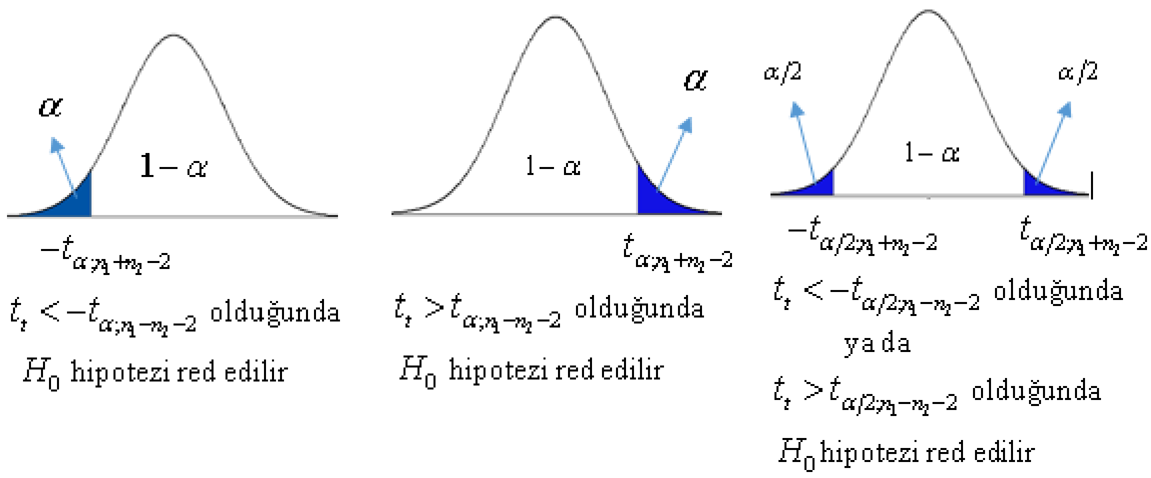
$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$ birleştirilmiş varyans

$$S_p = \sqrt{S_p^2}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

3) Karar

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$



Güven Aralığı;

$$P\left((\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \mu_1-\mu_2 < (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \right) = 1-\alpha$$

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

Örnek: Bir ilaç firması, ilacı şişelere doldurmak için 2 makine kullanıyor. Birinci makineden $n_1=10$ ikinci makineden $n_2=12$ şişe seçiliyor. Bu şişeler incelendiğinde 1.makine ortalama $\bar{x}_1=30.87$ birim sıvı, ikinci makine ortalama $\bar{x}_2=30.68$ birim sıvı dolduruyor. Birinci ve ikinci makinanın varyanslarıda $S_1^2=0.0225$ ve $S_2^2=0.0324$ olarak hesaplanıyor.

a) $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ olsun. %95 güven düzeyinde birinci makinenin daha fazla sıvı doldurup doldurmamasını test ediniz.

b) %95 güven düzeyinde kitle ortalamaları arasındaki fark için güven aralığını bulunuz.

Çözüm:

a) $1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05$

$n_1=10,\quad \bar{x}_1=30.87,\quad S_1^2=0.0225$

$n_2=12,\quad \bar{x}_2=30.68,\quad S_2^2=0.0324$

1) Test istatistiği

$H_0:\mu_1=\mu_2$

$H_1:\mu_1>\mu_2$

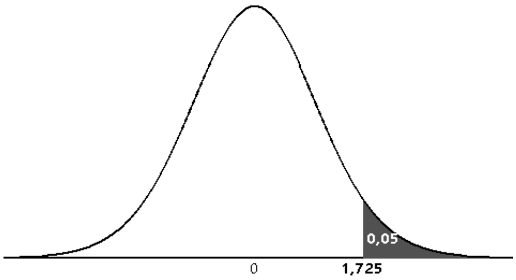
2) Test istatistiği

$$t_t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{(30.87-30.68)-0}{0.167\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)}=2.657$$

$$S_p^{\ 2}=\frac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2}=\frac{(10-1)0.0225+(12-1)0.0324}{10+12-2}=\frac{0.5589}{20}=0.0279$$

$$S_p=\sqrt{S_p^2}=\sqrt{0.0279}=0.167$$

3) Karar



$1-\alpha=0.95\Rightarrow\alpha=0.05$

$n_1+n_2-2=10+12-2=20$ serbestlik derecesi

$t_{0.05:10+12-2}=t_{0.05:20}=1.725$

$t_t=2.657>t_{0.025;20}=1.725$ olduğundan H_0 hipotezi red edilir.

a) Güven aralığı

$$P\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{\alpha/2:n_1-n_2-2}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<\bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{\alpha/2:n_1-n_2-2}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)=1-\alpha$$

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2\mp t_{\alpha/2:n_1-n_2-2}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$1-\alpha=0.95\Rightarrow\alpha=0.05\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.025$$

$$t_{\alpha/2:n_1+n_2-2}=t_{0.025:10+12-2}=t_{0.025:20}=2.086$$

$$\hat{\theta}_1=(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2:n_1-n_2-2}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=(30.87-30.68)-2.086(0.167)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}}=0.041$$

$$\hat{\theta}_2=(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\alpha/2:n_1-n_2-2}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=(30.87-30.68)+2.086(0.167)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{12}}=0.339$$

%95 güven düzeyinde kitle ortalamasını içeren aralık: $(0.041;0.339)$

b) σ_1^2 *ve* σ_2^2 bilinmiyor ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

1) Hipotez kurulur

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

2) Test istatistiği

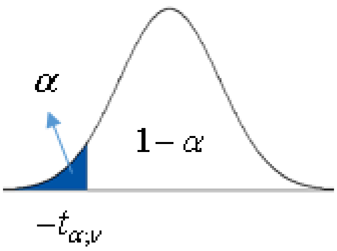
$$t_t = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{S_1^{\,2}}{n_1} + \dfrac{S_2^{\,2}}{n_2}}}$$

Serbestlik derecesi bilinmiyor;

$$\nu(\textit{serbestlik derecesi}) = \frac{\left(\dfrac{S_1^{\,2}}{n_1} + \dfrac{S_2^{\,2}}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{S_1^{\,2}}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{S_2^{\,2}}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

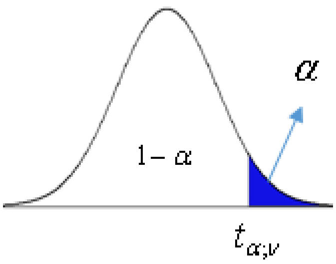
3) Karar

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$
$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$



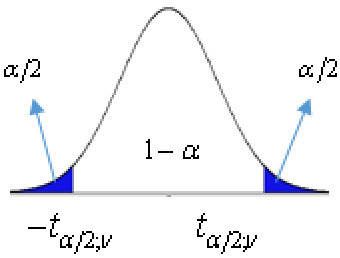
$t_t < -t_{\alpha;\nu}$ olduğunda

H_0 hipotezi red edilir



$t_t > t_{\alpha;\nu}$ olduğunda

H_0 hipotezi red edilir



$t_t < -t_{\alpha/2;\nu}$ olduğunda

ya da

$t_t > t_{\alpha/2;\nu}$ olduğunda

H_0 hipotezi red edilir

Güven Aralığı;

$$P\left(\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm t_{\alpha/2:v}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

Örnek: Bir ilaç firması, ilacı şişelere doldurmak için 2 makine kullanıyor. Birinci makineden $n_1=10$ ikinci makineden $n_2=12$ şişe seçiliyor. Bu şişeler incelendiğinde 1.makine ortalama $\bar{x}_1=30.87$ birim sıvı, ikinci makine ortalama $\bar{x}_2=30.68$ birim sıvı dolduruyor. Birinci ve ikinci makinanın varyanslarıda $S_1^2=0.0225$ ve $S_2^2=0.0324$ olarak hesaplanıyor.

a) $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ olsun. %95 güven düzeyinde birinci makinenin daha fazla sıvı doldurup doldurmamasını test ediniz.

b) %95 güven düzeyinde kitle ortalamaları arasındaki fark için güven aralığını bulunuz.

Çözüm:

a) $1-\alpha=0.95\Rightarrow\alpha=0.05$

$n_1=10,\quad \bar{x}_1=30.87,\quad S_1^2=0.0225$

$n_2=12,\quad \bar{x}_2=30.68,\quad S_2^2=0.0324$

1) Test istatistiği

$H_0:\mu_1=\mu_2$

$H_1:\mu_1>\mu_2$

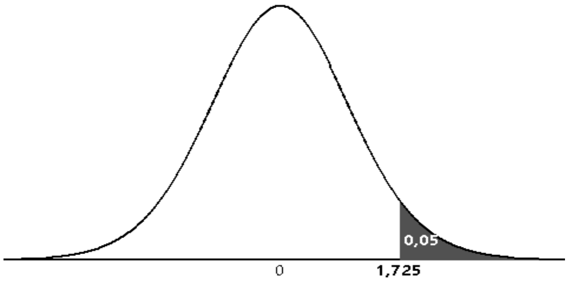
2) Test istatistiği

$$t_t=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}=\frac{(30.87-30.68)-0}{\left(\frac{0.0225}{10}+\frac{0.0324}{12}\right)}=2.657$$

Serbestlik derecesi

$$v=\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1}+\frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}=\frac{\left(\frac{0.0225}{10}+\frac{0.0324}{12}\right)^2}{\frac{\left(\frac{0.0225}{10}\right)^2}{10-1}+\frac{\left(\frac{0.0324}{12}\right)^2}{12-1}}=\frac{(0.00495)^2}{\frac{(0.00225)^2}{9}+\frac{(0.0027)^2}{11}}=\frac{0,0000245}{0.000001225}=20$$

3) Karar



$1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05$

$\nu=20$ serbestlik derecesi

$t_{0.05;\nu}=t_{0.05;20}=1.725$

$t_t=2.657>t_{0.025;20}=1.725$

H_0 hipotezi red edilir.

b) Güven aralığı

$$P\left(\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)-t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\right)+t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)=1-\alpha$$

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$1-\alpha=0.95 \Rightarrow \alpha=0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025$$

$t_{\alpha/2;\nu}=t_{0.025;20}=2.086$

$$\hat{\theta}_1=(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}=(30.87-30.68)-2.086\sqrt{\frac{0.0225}{10}+\frac{0.0324}{12}}=0.04324$$

$$\hat{\theta}_2=(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\alpha/2;\nu}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}=(30.87-30.68)+2.086\sqrt{\frac{0.0225}{10}+\frac{0.0324}{12}}=0.3367$$

%95 güven düzeyinde kitle ortalamasını içeren aralık: $(0.04324; 0.3367)$

KAYNAKLAR

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

   Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

   Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

   Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

   Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html