

## BÖLÜM 13

**Durum 2:**  $\sigma_1^2$  ve  $\sigma_2^2$  bilinmiyor.

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{1n} \sim N(\mu_1, \sigma^2)$$

$$X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots, X_{2n} \sim N(\mu_2, \sigma^2)$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Bu durum kendi arasında ikiye ayrılır;

a)  $\sigma_1^2$  ve  $\sigma_2^2$  bilinmiyor fakat ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ )

1) Hipotez

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

2) Test istatistiği

$$t_t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \text{ birleştirilmiş varyans}$$

$$S_p = \sqrt{S_p^2}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

3) Karar

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

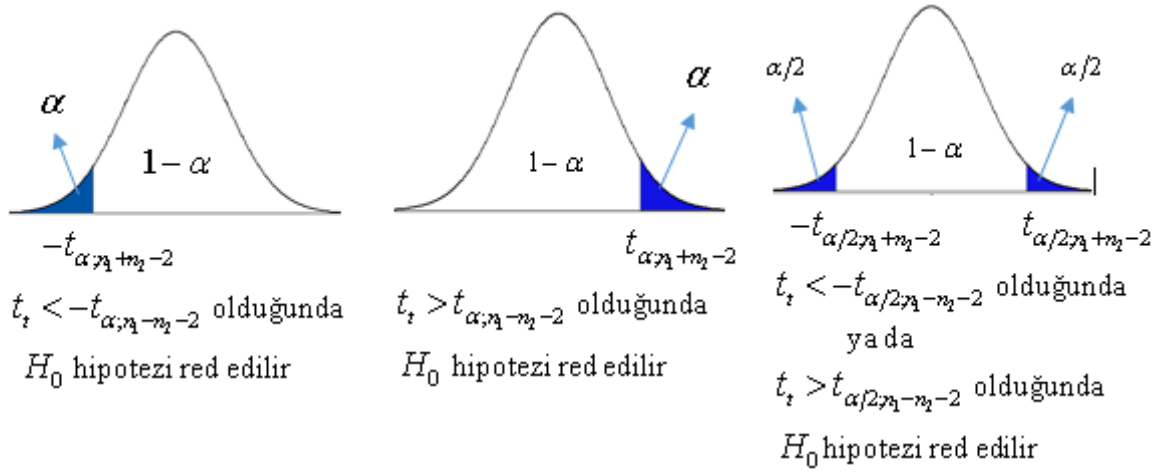
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$



### Güven Aralığı;

$$P\left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2; n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2; n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2; n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

**Örnek:** Bir ilaç firması, ilacı şişelere doldurmak için 2 makine kullanıyor. Birinci makineden  $n_1 = 10$  ikinci makineden  $n_2 = 12$  şişe seçiliyor. Bu şişeler incelendiğinde 1.makine ortalama  $\bar{x}_1 = 30.87$  birim sıvı, ikinci makine ortalama  $\bar{x}_2 = 30.68$  birim sıvı dolduruyor. Birinci ve ikinci makinanın varyanslarında  $S_1^2 = 0.0225$  ve  $S_2^2 = 0.0324$  olarak hesaplanıyor.

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  olsun. %95 güven düzeyinde birinci makinenin daha fazla sıvı doldurup doldurmamasını test ediniz.
- %95 güven düzeyinde kitle ortalamaları arasındaki fark için güven aralığını bulunuz.

### Çözüm:

a)  $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

$n_1 = 10, \bar{x}_1 = 30.87, S_1^2 = 0.0225$

$n_2 = 12, \bar{x}_2 = 30.68, S_2^2 = 0.0324$

#### 1) Test istatistiği

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

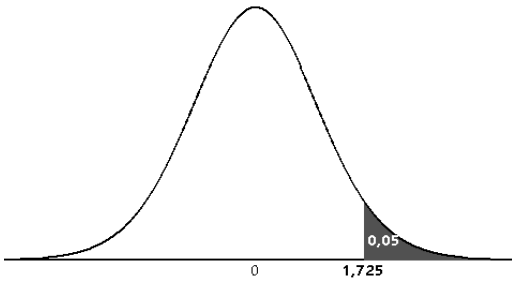
## 2) Test istatistiği

$$t_t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{(30.87 - 30.68) - 0}{0.167 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \right)} = 2.657$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(10 - 1)0.0225 + (12 - 1)0.0324}{10 + 12 - 2} = \frac{0.5589}{20} = 0.0279$$

$$S_p = \sqrt{S_p^2} = \sqrt{0.0279} = 0.167$$

## 3) Karar



$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$$n_1 + n_2 - 2 = 10 + 12 - 2 = 20 \text{ serbestlik derecesi}$$

$$t_{0.05;10+12-2} = t_{0.05;20} = 1.725$$

$$t_t = 2.657 > t_{0.025;20} = 1.725$$

$H_0$  hipotezi red edilir.

## a) Güven aralığı

$$P\left( \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2;n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2;n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \mp t_{\alpha/2;n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$t_{\alpha/2;n_1+n_2-2} = t_{0.025;10+12-2} = t_{0.025;20} = 2.086$$

$$\hat{\theta}_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2;n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (30.87 - 30.68) - 2.086(0.167) \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = 0.041$$

$$\hat{\theta}_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2;n_1+n_2-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (30.87 - 30.68) + 2.086(0.167) \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = 0.339$$

%95 güven düzeyinde kitle ortalamasını içeren aralık: (0.041;0.339)

## **KAYNAKLAR**

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

<http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html>