

BÖLÜM 14

b) σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyor ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)

1) Hipotez kurulumu

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

2) Test istatistiği

$$t_t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

Serbestlik derecesi bilinmiyor;

$$v(\text{serbestlik derecesi}) = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

3) Karar

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

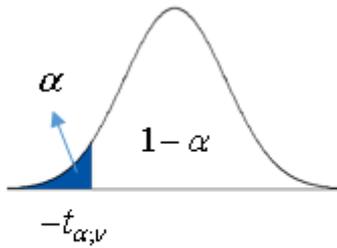
$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

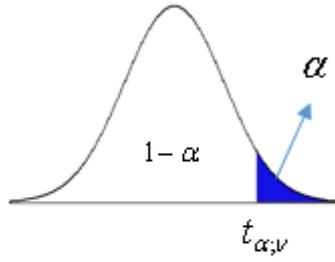
$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

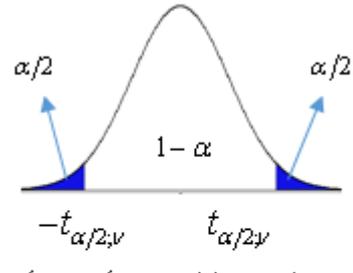
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$



$t_t < -t_{\alpha, v}$ olduğunda
 H_0 hipotezi red edilir



$t_t > t_{\alpha, v}$ olduğunda
 H_0 hipotezi red edilir



$t_t < -t_{\alpha/2, v}$ olduğunda
ya da
 $t_t > t_{\alpha/2, v}$ olduğunda
 H_0 hipotezi red edilir

Güven Aralığı;

$$P\left(\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) - t_{\alpha/2, v} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right) + t_{\alpha/2, v} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2; \nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

Örnek: Bir ilaç firması, ilacı şişelere doldurmak için 2 makine kullanıyor. Birinci makineden $n_1 = 10$ ikinci makineden $n_2 = 12$ şişe seçiliyor. Bu şişeler incelendiğinde 1.makine ortalama $\bar{x}_1 = 30.87$ birim sıvı, ikinci makine ortalama $\bar{x}_2 = 30.68$ birim sıvı dolduruyor. Birinci ve ikinci makinenin varyansları da $S_1^2 = 0.0225$ ve $S_2^2 = 0.0324$ olarak hesaplanıyor.

- a) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ olsun. %95 güven düzeyinde birinci makinenin daha fazla sıvı doldurup doldurmamasını test ediniz.
b) %95 güven düzeyinde kitle ortalamaları arasındaki fark için güven aralığını bulunuz.

Çözüm:

a) $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$

$n_1 = 10, \bar{x}_1 = 30.87, S_1^2 = 0.0225$

$n_2 = 12, \bar{x}_2 = 30.68, S_2^2 = 0.0324$

1) Test istatistiği

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

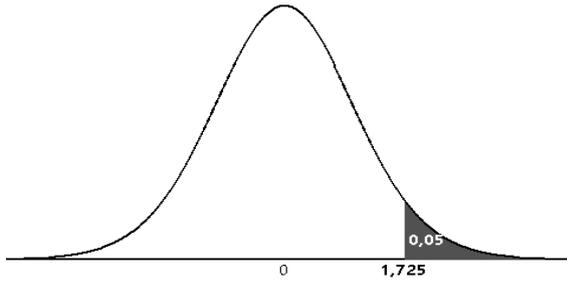
2) Test istatistiği

$$t_t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(30.87 - 30.68) - 0}{\left(\frac{0.0225}{10} + \frac{0.0324}{12}\right)} = 2.657$$

Serbestlik derecesi

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}} = \frac{\left(\frac{0.0225}{10} + \frac{0.0324}{12}\right)^2}{\frac{\left(\frac{0.0225}{10}\right)^2}{10 - 1} + \frac{\left(\frac{0.0324}{12}\right)^2}{12 - 1}} = \frac{(0.00495)^2}{\frac{(0.00225)^2}{9} + \frac{(0.0027)^2}{11}} = \frac{0.0000245}{0.000001225} = 20$$

3) Karar



$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$\nu = 20$ serbestlik derecesi

$$t_{0.05;\nu} = t_{0.05;20} = 1.725$$

$$t_t = 2.657 > t_{0.025;20} = 1.725$$

H_0 hipotezi red edilir.

a) Güven aralığı

$$P\left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2;\nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2;\nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2;\nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$t_{\alpha/2;\nu} = t_{0.025;20} = 2.086$$

$$\hat{\theta}_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2;\nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = (30.87 - 30.68) - 2.086 \sqrt{\frac{0.0225}{10} + \frac{0.0324}{12}} = 0.04324$$

$$\hat{\theta}_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2;\nu} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = (30.87 - 30.68) + 2.086 \sqrt{\frac{0.0225}{10} + \frac{0.0324}{12}} = 0.3367$$

%95 güven düzeyinde kitle ortalamasını içeren aralık: (0.04324;0.3367)

KAYNAKLAR

1. Uygulamalı İstatistik (1994)

Ayşen APAYDIN , Alaettin KUTSAL, Cemal ATAKAN

2. Olasılık ve İstatistik Problemler ve Çözümleri ile (2008)

Prof. Dr. Semra ERBAŞ

3. Olasılık ve İstatistik (2006)

Prof. Dr. Fikri Akdeniz

4. Olasılık ve İstatistiğe Giriş I-II (2011)

Prof. Dr. Fikri Öztürk

5. Fikri Öztürk web sitesi

<http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html>