BÖLÜM 3

Lineer Olmayan Denklemlerde Çözüm Yöntemleri

Yarılama Yöntemi

Bir $f(x)=0$ denkleminin kökleri veya bir tane kökü $[a,b]$ aralığı içerisinde yer alsın ve bu aralıkta fonksiyon sürekli olsun.

$$f(a)\cdot f(b)<0$$

Yarılama yöntemi ardışık olarak kökünün bulunduğu aralığı yarıya indirerek kökü içeren aralık uzunluğunu istediğimiz kadar küçük yapan bir yöntemdir.

Algoritma;

1)Kökü içeren bir $I_0=[a_0,b_0]$ aralığı bulunur. $\left(f(a_0)\cdot f(b_0)<0\right)$

2) $[a_0,b_0]\rightarrow\dfrac{a_0+b_0}{2}$

Eğer $f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right)=0$ ise $x_0=\dfrac{a_0+b_0}{2}$ bu fonksiyonun köküdür.

Eğer $f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right)\cdot f(a_0)<0$ ise yeni aralık $\left[a_0,\dfrac{a_0+b_0}{2}\right]$ dır.

Eğer $f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right)\cdot f(b_0)<0$ ise yeni aralık $\left[\dfrac{a_0+b_0}{2},b_0\right]$ dır.

3) n. adımda işlem durdurulur ve yaklaşık kök $\tilde{\alpha}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ olur.

Mutlak hata $\Rightarrow|e_\alpha|=|\alpha-\tilde{\alpha}|$

$$I_0=[a_0,b_0]$$

$$I_1=\left[a_0,\frac{a_0+b_0}{2}\right] \text{ veya } \left[\frac{a_0+b_0}{2},b_0\right]$$

$$\vdots$$

$$I_n$$

$$I_0 > I_1 > I_2 > \dots > I_n$$

$$d\left(I_0\right) = b_0 - a_0$$
$$d\left(I_1\right) = \frac{b_0 - a_0}{2}$$
$$d\left(I_2\right) = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$$
$$\vdots$$
$$d\left(I_n\right) = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

Durdurma kuralı;

1)n. adımda işlem durdurulur.

2) $\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon$

3) $f\left(x_n\right) < \rho$

$$e = \left|\alpha - \tilde{\alpha}\right| = \left|\alpha - \frac{a_n + b_n}{2}\right| \leq \frac{\left|b_n - a_n\right|}{2}$$
$$= \varepsilon_{\tilde{\alpha}}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b_0 - a_0}{2^n}\right)$$
$$= \left(\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}\right)$$

<u>ÖRNEK:</u>

$x - 1 - \sin x = 0$ yarılama yöntemiyle yaklaşık kökünü $\left[0, \pi\right]$ aralığında bulalım. $\varepsilon = 10^{-2}$

$$f\left(0\right) = -1 < 0$$

$$f\left(\pi\right) = \pi - 1 > 0$$

$$f\left(0\right) \cdot f\left(\pi\right) < 0$$

$$\frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1-\sin\frac{\pi}{2}<0\rightarrow\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

$$\frac{\pi+\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}-1-\sin\frac{3\pi}{4}>0\rightarrow\left[\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\tilde{\alpha}=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}}{2}=\frac{5\pi}{8}$$

$$\max hata\Rightarrow\varepsilon_{\tilde{\alpha}}=\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\le 10^{-2}$$

$$\frac{\pi-0}{2^{n+1}}\le 0.01\Rightarrow\frac{3.14}{0.01}\le 2^{n+1}\Rightarrow 314\le 2^{n+1}\Rightarrow 8.29\le n+1\Rightarrow 7.29\le n$$

$n=8\rightarrow$ adım gerekli.

Örnek:

$f(x)=x^3+4x^2-10$ fonksiyonunu $[1,2]$ arasındaki kökünü yarılama yöntemiyle $\varepsilon=2\cdot10^{-4}$ olacak şekilde hesaplayın.

$$f(1)=1^3+4\cdot1^2-10=-5<0$$
$$f(2)=2^3+4\cdot2^2-10=14>0$$
$$f(1)\cdot f(2)<0$$
$$x_0=\frac{1+2}{2}=1.5$$
$$f(1.5)=2.37>0,[1,1.5]$$
$$x_1=\frac{1+1.5}{2}=1.25$$
$$f(1.25)=-1.8<0,[1.25,1.5]$$
$$x_2=\frac{1.25+1.5}{2}=1.375$$
$$f(1.375)=0.16211>0,[1.25,1.375]$$

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
0	1	2	1.5	2.375
1	1	1.5	1.25	-1.73687
2	1.25	1.5	1.375	0.16211
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11	1.36476094	1.365234375	1.364990233	-0.00396
12	1.364990235	1.635234374	1.365112305	-0.00194

$\left|x_n - x_{n-1}\right| = \left|1.365112305 - 1.36499233\right| = 0.00012207 \le \varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ durulur.

<u>Regula Falsi Kiriş Yöntemi</u>

$f(x) = 0$, $[a_0, b_0]$ aralığında kökü var mı diye bakacağız.

$f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$

$$y - f(a_0) = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} \cdot (x - a_0)$$

$$0 - f(a_0) = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} \cdot (x - a_0)$$

$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$

$f(a_0) \cdot f(x_0) < 0$ ise $[a_0, x_0]$

$f(b_0) \cdot f(x_0) < 0$ ise $[x_0, b_0]$

Durdurma kuralı;

1)n. adımdan sonrasında

2) $\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon$ ise $x_{n+1} = \tilde{\alpha}$

3) $f(x_{n+1}) < \rho$ ise

Örnek:

$f(x)=x^2-64$ denkleminin $[0,10]$ arasındaki kökünü $\varepsilon=10^{-2}$ alarak bulunuz.

Çözüm:

$$f(0)=0^2-64=-64<0$$

$$f(10)=10^2-64=36>0$$

$$f(0)\cdot f(10)<0$$

$$x_0=\frac{0.36-10\cdot(-64)}{36-(-64)}=\frac{640}{100}=6.4$$

$$f(x_0)=(6.4)^2-64=-23.04<0\rightarrow[6.4,10]$$

$$x_1=\frac{6.4\cdot 36-10\cdot(-23.04)}{36-(-23.04)}=7.8048$$

$$f(x_1)=(7.8048)^2-64=-3.16<0\rightarrow[7.8048,10]$$

$$x_2=\frac{7.8048\cdot 36-10(-3.16)}{36-(-3.16)}=7.9775$$

$$f(x_2)=(7.9775)^2-64=-3595<0\rightarrow[7.9775,10]$$

$\vdots$

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)