BÖLÜM 5

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Lineer olmayan bir denklemin kökünü ya da köklerini bulmak için kullanılan yöntemlerde bazı değişikler yapılarak lineer olmayan denklem sistemleri için de kullanılabilir.

$$\begin{aligned} &f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ &f_2(x_1,\dots,x_n)=0 \\ &\vdots \\ &f_n(x_1,\dots,x_n)=0 \end{aligned}$$

n bilinmeyenli n denklemle uğraşacağız.

Basit iterasyon

Lineer olmayan bir denklem sistemi

$$\begin{aligned} &f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ &f_2(x_1,\dots,x_n)=0 \\ &\vdots \\ &f_n(x_1,\dots,x_n)=0 \end{aligned}$$

şeklinde verilmiş olsun.

$$\begin{aligned} &x_1=g_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ &x_2=g_2(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ &. \\ &. \\ &. \\ &x_n=g_n(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{aligned}$$

şeklinde g fonksiyonları oluşturulsun. Basit iterasyon yönteminde uygulanan yakınsama koşulları lineer olmayan denklem sistemleri için de uygulanır.

x^0 başlangıç değeri alınıp $x^{n+1}=g(x^n)$ ardışık yineleme formülüyle α köküne yaklaşır.

Tanım: $B\subset R^n$ kapalı bir bölge olsun.

$g:B\to B$

$d\left(g\left(x^1\right),g\left(x^2\right)\right)\le ad\left(x^1,x^2\right),$ $a\in(0,1)$ ise g fonksiyonuna B ‘de büzülme fonksiyonu denir.

Teorem: $g,\ B\in R^n$ kapalı bölgesinde bir büzülme fonksiyonu olmak üzere $x=g(x)$ denklem sisteminin bir tek çözümü vardır. α $\left(\alpha=g(\alpha)\right)$dır. $x^0\in B$ vektörü için $x^{n+1}=g\left(x^n\right)$ ardışık yenileme formülü ile $x^0,x^1,\ldots,x^n\to\alpha$ şeklinde α köküne yakınsar.

$g:R\to R$ olmak üzere

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{pmatrix} g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ g_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ \vdots\\ g_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{pmatrix}$$

Fonksiyonları için $x^0\in B$başlangıç değerine göre taylor seri açılımı

$$g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=g_1\left(x^0{}_1,x^0{}_2,\ldots,x^0{}_n\right)+\left(x_1-x_1^0\right)\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial x_1}+\left(x_2-x_2^0\right)\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial x_2}\ldots+\left(x_n-x_n^0\right)\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial x_n}$$

Şeklindedir. n tane denklem için taylor seri açılımı uygulanırsa

$$\left\|g\left(x^2\right)-g\left(x'\right)\right\|=\left\|\begin{matrix}\left(x^2{}_1-x^1{}_1\right)\cdot\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial x_1}+\ldots+\left(x^2{}_n-x^1{}_n\right)\cdot\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial x_n}\\ \vdots\\ \left(x^2{}_1-x^1{}_1\right)\cdot\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial x_n}+\ldots+\left(x^2{}_n-x^1{}_n\right)\cdot\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial x_n}\end{matrix}\right\|$$

$$=\left\|\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial g_1(\xi)}{\partial x_n}\\ \vdots\\ \frac{\partial g_n(\xi)}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^2-x_1^1\\ \vdots\\ x_n^2-x_n^1\end{bmatrix}\right\|$$

$$\leq\|G\|\left\|x^2-x^1\right\|$$

$g_{ij}=\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$ olmak üzere $\|G\|=\left(\sum_{ij}g_{ij}^2\right)^{1/2}$

$\|G\|_{x_0}<1$ ise g bir büzülme fonksiyonudur.

Durdurma kuralı;

1) $\left\|x^n-x^{n+1}\right\|_{\max}=\max\left\{\left|x_1{}^n-x_1{}^{n+1}\right|,\ldots,\left|x_n{}^n-x_n{}^{n+1}\right|\right\}<\varepsilon$ ise dur.

2) $\|f(x)\|_{\max} < \delta$

3) n adım sonrasında dur.

Örnek:

$$2x_1^2 + x_2^2 - 5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 6\cdot 10^{-2}$$

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{5 - {x_2}^2}{2}}$$

$$x_2 = \frac{3 - x_1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5 - {x_2}^2}{2} \\ \dfrac{3 - x_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{x_2}{\sqrt{5 - {x^2}_2}} \\ \dfrac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|G\|_{x_0} < 1$$

$$\|G\|_{x_0} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x_2}{\sqrt{5 - {x^2}_2}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 0^2} = 0.525 < 1$$

olduğundan $g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{5 - {x_2}^2}{2}} \\ \dfrac{3 - x_1}{2} \end{pmatrix}$ olarak alınabilir.

$$x = g(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{5 - x_2^{\,2}}{2}} \\ \dfrac{3 - x_1}{2} \end{pmatrix} \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$x^1 = g\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{5 - (0.5)^2}{2}} \\ \dfrac{3 - 1.5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.54 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = g\left(x^1\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{5 - (0.75)^2}{2}} \\ \dfrac{3 - 1.54}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.49 \\ 0.73 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$x^n = g\left(x^{n-1}\right)$$

$$\left\| x^2 - x^1 \right\|_{\max} = \max\left\{ |1.54 - 1.49|, |0.75 - 0.73| \right\}$$

$$= \max\left\{0.05, 0.02\right\}$$

$= 0.05 < 6 \cdot 10^{-2}$ oldu dur.

$$\tilde{\alpha} = \begin{pmatrix} 1.49 \\ 0.73 \end{pmatrix}$$

NEWTON YÖNTEMİ

Bu yöntem lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan Newton Raphson yönteminin genelleştirilmişidir. Taylor seri açılımından faydalanılır.

$$\begin{aligned} f_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) &= 0 \\ f_2\left(x_1, \ldots, x_n\right) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n\left(x_1, \ldots, x_n\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,\ldots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n)=0 \end{pmatrix}$$

x^n'in α komşuluğunda taylor açılımı

$$f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$$
$$=f\left(x^0{}_1,\ldots,x^0{}_n\right)+\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_i-x_i{}^0\right)+\frac{1}{2!}\sum\sum\frac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}\left(x_i-x_i{}^0\right)\cdot\left(x_j-x^0{}_j\right)+\ldots$$

$f\left(x^n\right)$ fonksiyonun x^n de α köküne göre açalım ;

$$f\left(x^n\right)=f(\alpha)+\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{J(.)}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} x^n{}_1-\alpha \\ \vdots \\ x^n{}_n-\alpha \end{bmatrix}}_{\left(x^n-\alpha\right)}$$

yazabiliriz. Eşitliğin sağ tarafında iki veya daha yüksek dereceden türevli terimler ihmal edilmiştir.

α kök olduğundan $f(\alpha)=0$'dır. $J(.)=\left(\frac{\partial f_i(.)}{\partial x_j}\right)_{n\times n}$ $\quad i,j=1,2,\ldots,n$

$$f\left(x^n\right)=J(\xi)\cdot\left(x^n-\alpha\right)$$

$(n+1)$. Adımda kökü var olsun.

$$f\left(x^n\right)=J\left(x^n\right)\cdot\left(x^n-x^{n+1}\right)$$

$$x^{n+1}=x^n-J^{-1}\left(x^n\right)\cdot f\left(x^n\right)$$

Durdurma kuralı;

1) $\left\|x^n-x^{n+1}\right\|_{\max}=\max\left\{\left|x_1{}^n-x_1{}^{n+1}\right|,\ldots,\left|x_n{}^n-x_n{}^{n+1}\right|\right\}<\varepsilon$ ise dur.

2) $\left\|f(x)\right\|_{\max}<\delta$

3) n adım sonrasında dur.

ÖRNEK:

$$x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$
$$2x_1 + x^2{}_2 - 5 = 0$$

doğrusal olmayan denklem sistemi için $x^0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$ başlangıç değerini alarak $\varepsilon = 0.1$ için köklerini bulunuz.

Çözüm:

$$x^{n+1} = x^n - J^{-1}\left(x^n\right) f\left(x^n\right) \quad , \quad x^0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J\left(x\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}_{x^0}^{-1} \cdot f\left(x^0\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1.5 + 2.1 - 3 = 0.5 \\ 2\cdot\left(1.5\right)^2 + 1^2 - 5 = 0.5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{10} & \frac{-2}{10} \\ \frac{-6}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\left\| x^0 - x^1 \right\| = \max\left\{ \left|1.5 - 1.5\right|, \left|1 - 0.75\right| \right\}$$

$= 0.25 > \varepsilon$ olduğundan algoritmaya devam edilir.

$$x^2 = x^1 - J^{-1} \cdot \left(x^1\right) \cdot f\left(x^1\right)$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}_{x^0}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0625 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1.5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0625 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.75 \end{bmatrix} + \frac{1}{10.5} \cdot \begin{bmatrix} 1.5 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0625 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.488 \\ 0.756 \end{bmatrix}$$

$$\left\| x^1 - x^2 \right\| = \max \left\{ |1.5 - 1.488|, |0.75 - 0.756| \right\}$$

$$= 0.012 < \varepsilon \rightarrow dur$$

Ödev:

1. $$x^2 + xy - 10 = 0$$
$$y + 3xy^2 - 57 = 0$$

doğrusal olmayan denklem sistemi için $x^0 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}$ başlangıç değerini alarak $\varepsilon = 0.01$ için basit iterasyon ve Newton yöntemi ile çözümünü yapınız.

2. $$x^2 - 2x - y + 0.5 = 0$$
$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

doğrusal olmayan denklem sistemi için $x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ başlangıç değerini alarak $\varepsilon = 0.01$ için basit iterasyon ve Newton yöntemi ile çözümünü yapınız.

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)