BÖLÜM 6

<u>İNTERPOLASYON</u>

Bir fonksiyon sonlu sayıdaki $x_0,...,x_n \in R$ noktalarında aldığı $f(x_0),..., f(x_n)$ fonksiyon değerleri bilinsin (ancak fonksiyonun kendisi bilinmiyor). Bu noktalardan geçen n. dereceden bir tek

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Polinomu vardır. $x_0,...,x_n$ noktalarından geçen $P_n(x)$ polinomu elde edilerek herhangi bir x noktasındaki $f(x)$ değerinin yerine $P_n(x)$ değeri alınırsa, bilinmeyen $f(x)$ değeri yaklaşık olarak

$\tilde{f}(x) = P_n(x)$ şeklinde hesaplanmış olur. Bu yaklaşıma n. Dereceden polinom interpolasyonu denir.

$(x_0, f(x_0)),(x_1, f(x_1)),...,(x_n, f(x_n))$ noktalarından geçen n. dereceden polinom denklemi

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Şeklinde elde edillecek.

<u>İNTERPOLASYON VE LAGRANGE POLİNOMU</u>

<u>Birinci Dereceden Polinom İnterpolasyonu</u>

Bir fonksiyonun $x_0, x_1 \in R$ noktalarındaki $f(x_0)$, $f(x_1)$ değerleri bilinsin. $x_0 < x < x_1$ olmak üzere, x bir ara değer olsun ve $f(x)$ bilinmesin (yada kolay hesaplanamasın). $f(x)$ değerini birinci dereceden polinom interpolasyonu yardımı ile hesaplamaya çalışalım.

$(x_0, f(x_0)),(x_1, f(x_1))$ noktalarından geçen doğru denklemi

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad , \quad m = eğim = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

olmak üzere , <u>birinci dereceden polinom interpolasyonu</u>

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$= \frac{(x - x_0) f(x_1) - (x - x_1) f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) - \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} f(x_0)$$

$$\boxed{= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)}$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$x = x_0$ *iken* $L_0(x_0) = 1, L_1(x_0) = 0$

$x = x_1$ *iken* $L_0(x_1) = 0, L_1(x_1) = 1$

$$P_1(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

ÖRNEK:

$x_0 = 3.1$ *için* $f(x_0) = 1.1314$

$x_1 = 3.2$ *için* $f(x_1) = 1.1632$

$x = 3.16$ *için* $\tilde{f}(x) = ?$

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$P_1(3.16) = \frac{3.16 - 3.2}{3.1 - 3.2} \cdot (1.1314) + \frac{3.16 - 3.1}{3.2 - 3.1} \cdot (1.1632) = 1.15084$$

$f(x) = \ln x$'in gerçek değeri

$$f(3.16) = \ln(3.16) = 1.1505$$

<u>n. Dereceden Polinom İnterpolasyonu</u>

$x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ değerleri için $f(x_0), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ fonksiyon değerleri bilinsin.

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), ..., (x_n, f(x_n))$$

noktalarından geçen n. dereceden $P_n(x)$ polinomu $L_0(x), L_1(x), ..., L_n(x)$ polinomları kullanılarak

$$P_n(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + \ldots + L_n(x) f(x_n)$$

olarak ifade edilir.

$$P_n(x_0) \rightarrow L_0(x_0) = 1, L_1(x_0) = 0, L_2(x_0) = 0, \ldots, L_n(x_0) = 0$$

$$P_n(x_1) \rightarrow L_0(x_1) = 0, L_1(x_1) = 1, L_2(x_1) = 0, \ldots, L_n(x_1) = 0$$

$$P_n(x_2) \rightarrow L_0(x_2) = 0, L_1(x_2) = 0, L_2(x_2) = 1, \ldots, L_n(x_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$P_n(x_n) \rightarrow L_0(x_n) = 0, L_1(x_n) = 0, L_2(x_n) = 0, \ldots, L_n(x_n) = 1$$

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olmak üzere $L_0(x)$ polinomunu göz önüne alalım .

$$L_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

şeklinde yazılabilir. $L_0(x_0) = 1$ olduğundan

$$c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

dir.

Benzer şekilde $L_i(x)$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right) f(x_i) \;\rightarrow \textit{Langrance İnterpolasyon Polinomu}$$

elde edilir. Bu formüle Lagrange interpolasyon formülü adı verilir.

ÖRNEK: $f: R\rightarrow R$ $(-1,0,1,4)$ noktalarındaki değerleri $(3,2,4,-10)$ 'dur. Bu fonksiyonun 3. dereceden polinom denklemini oluşturunuz.

$$P_3(x)=L_0(x)\,f(x_0)+L_1(x)\,f(x_1)+L_2(x)\,f(x_2)+L_3(x)\,f(x_3)$$

$$=\sum_{i=0}^{3} L_i(x)\, f(x_i)$$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$=\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(-1-0)(-1-1)(-1-4)}=\frac{x(x-1)(x-4)}{-10}$$

$$L_1(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{4}$$

$$L_2(x)=\frac{(x+1)x(x-4)}{-6}$$

$$L_3(x)=\frac{(x+1)x(x-1)}{60}$$

Olmak üzere

$$P_3(x)=\sum_{i=0}^{3} L_i(x)\, f(x_i)$$

$$P_3(x)=\frac{(x-1)x(x-4)}{-10}\cdot 3+\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{4}\cdot 2+\frac{(x+1)x(x-4)}{-6}\cdot 4+\frac{(x+1)x(x-1)}{60}\cdot(-10)$$

$x=2$ yaklaşık değeri hesaplayınız.

$$P_3(2)=\frac{2\cdot 1\cdot(-2)}{-10}\cdot 3+\frac{3\cdot 1\cdot(-2)}{4}\cdot 2+\frac{3\cdot 2\cdot(-2)}{-6}\cdot 4+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{60}\cdot(-10)=\frac{26}{5}=5.2$$

İnterpolasyonda Hata

$x_0,\ldots,x_n$ noktaları $[a,b]$ aralığında olsun. $f \in \subset^{n+1}[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon $x \in [a,b]$ için $f^{n+1}(x)$ var olsun.

$\forall x \in [a,b]$ için $\xi_x \in (a,b)$ vardır ki;

$$f(x) - P_n(x) = (x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)\cdot\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\left|f^{n+1}(x)\right| < M,\ x \in [a,b]$$

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| \le \left|(x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)\right|\cdot\frac{M}{(n+1)!} < \frac{(b-a)^{n+1}\cdot M}{(n+1)!}$$

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)