BÖLÜM 7

Taylor Polinomları

Herhangi bir noktadaki değerleri bilinen bir f fonksiyonuna karşılık gelen bir P polinomu elde edilmeye çalışılır. P polinomu verilen x_0 noktasında f fonksiyonu ile aynı değeri alacaktır ve bu noktadaki türevleri de eşit olacaktır yani $P'(x_0) = f'(x_0)$ olmalıdır. Böyle bir f fonksiyonuna en iyi karşılık gelen P polinomu, x_0 noktası civarında f fonksiyonunun Taylor açılımı ile elde edilen n dereceden Taylor polinomudur.

$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \dfrac{f'(x_0)}{1!} + \ldots + (x - x_0)^n \cdot \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ şeklindedir. Bu polinom için hata terimi;

$$\left| f(x) - P_n(x) \right| = \left| R_n(x) \right| = \left| \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right|$$

Burada $\xi(x)$, x ile x_0 arasında bir sayıdır. $\xi(x) \in (x_0, x)$

<u>ÖRNEK:</u> $f(x) = (1+x)^{1/2}$ fonksiyonu veriliyor.

a) $x_0 = 0$ civarında 3.dereceden Taylor polinomunu bulunuz.

b)Yaklaşık olarak $\sqrt{1.1}$ değerini hesaplayınız ve yapılan hatayı bulunuz.

Çözüm:

a) $f(x) = (1+x)^{1/2}$, $f(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}, \quad f'''(0) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2}$$

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-0)^2 + (x-0)^3\,\frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

b) $f(x) = (1+x)^{1/2}$ olduğundan

$$\sqrt{1.1} = \sqrt{1+0.1} = f(0.1) = P_3(0.1)$$

$$P_3(0.1) = 1 + \frac{1}{2}(0.1) - \frac{1}{8}(0.1)^2 + \frac{1}{16}(0.1)^3 = 1.0488125$$

$\sqrt{1.1} = 1.048808848 \rightarrow$ gerçek değeri

Yapılan hata:

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| = \left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$$

$$\left|R_3(0.1)\right| = \left|\frac{-\frac{15}{16}(1+\xi)^{-7/2}}{4!}\cdot(0.1)^4\right| \le \frac{15}{16.24}(0.1)^4,\quad \max(1+\xi)^{-7/2},\ \xi \in (0, 0.1)$$

$$= \frac{0.0005}{128}\cdot 1 \le 3.91\times10^{-6} \rightarrow \textit{polinomun hatası}$$

$$|e| = |a - \tilde{a}| = 3.652\times10^{-6} \rightarrow \textit{mutlak hata}$$

Ödev:

x	2	3	4
$f(x)$	0.693	1.098	1.386

a) Lagrange interpolasyon polinomunu bularak $x = 2.5$ için interpolasyon polinomunun alacağı değeri hesaplayınız.

b) Yukarıdaki değerler $f(x) = ln(x)$ fonksiyonuna aittir. $x = 2.5$ için hata tahmini yapınız.

Örnek:

x	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.3499	1.4918	1.6487

Lagrange polinomlarını kullanarak $x=0.7$ için yaklaşık değeri bulunuz ve yapılan hatayı hesaplayınız.($f(x)=\sqrt{e^x}$)

Çözüm:

$$P_2(x)=\sum_{i=1}^{2} L_i(x)f(x_i)$$

$$=\frac{(x-0.8)(x-1)}{(0.6-0.8)(0.6-1)}(1.3499)+\frac{(x-0.6)(x-1)}{(0.8-0.6)(0.8-1)}(1.4918)+\frac{(x-0.6)(x-0.8)}{(1-0.6)(1-0.8)}(1.6487)$$

$$=\frac{(x-0.8)(x-1)}{0.08}(1.3499)-\frac{(x-0.6)(x-1)}{0.04}(1.4918)+\frac{(x-0.6)(x-0.8)}{0.08}(1.6487)$$

$$P_2(0.7)=\frac{(0.7-0.8)(0.7-1)}{0.08}(1.3499)-\frac{(0.7-0.6)(0.7-1)}{0.04}(1.4918)+\frac{(0.7-0.6)(0.7-0.8)}{0.08}(1.6487)$$

$$=0.5062125+1.11885-0.206087$$

$$=1.418975$$

Gerçek değer= $\sqrt{e^{0.7}}=1.419067$

Hata;

$$f(x)=\sqrt{e^x}\ ,\quad f'(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}\quad ,\quad f''(x)=\frac{1}{4}e^{x/2}\quad ,\quad f'''(x)=\frac{1}{8}e^{x/2}$$

$$|f(x)-P_2(x)|=\left|(x-0.6)(x-0.8)(x-1)\frac{(1/8)e^{\xi/2}}{3!}\right| \quad x=0.7 \text{ için}$$

$$|f(x)-P_2(0.7)|=\left|(0.7-0.6)(0.7-0.8)(0.7-1)\frac{(1/8)e^{\xi/2}}{3!}\right|$$

$[0.6,1]$ aralığında $e^{\xi/2}$ fonksiyonunu maksimum yapan değer 1'dir. Bu durumda

$$\leq \frac{1}{48}\left|(0.7-0.6)(0.7-0.8)(0.7-1)e^{1/2}\right|=0.00010305$$

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)