BÖLÜM 13

Langrance İnterpolasyonu ile Türev

Lagrange interpolasyonu

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, f(x_i)$$

şeklindedir. Türev

$$P_n'(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i'(x)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek:

$$f(x)=x^2+1$$

x	2	4	5	6
$f(x)$	5	17	26	37

Lagrange interpolasyonu

$$P_3(x)=\sum_{i=0}^{3} L_i(x)\, f(x_i)$$

$$P_3(x)=\frac{(x-4)(x-5)(x-6)}{(2-4)(2-5)(2-6)}\cdot 5+\frac{(x-2)(x-5)(x-6)}{(4-2)(4-5)(4-6)}\cdot 17+\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(5-2)(5-4)(5-6)}\cdot 26+\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(6-2)(6-4)(6-5)}\cdot 37$$

$$=-\frac{5}{24}\left(x^3-15x^2+74x-120\right)+\frac{17}{4}\left(x^3-13x^2+52x-60\right)-\frac{26}{3}\left(x^3-12x^2+44x-48\right)+\frac{37}{8}\left(x^3-11x^2+38x-40\right)$$

$$P_3'(x)=-\frac{5}{24}\left(3x^2-30x+74\right)+\frac{17}{4}\left(3x^2-26x+52\right)-\frac{26}{3}\left(3x^2-24x+44\right)+\frac{37}{8}\left(3x^2-22x+38\right)$$

$x=4$ için

$$P_3'(4)=-\frac{5}{12}-17+\frac{104}{3}-\frac{37}{4}=8$$

Gerçek değer;

$$f'(x)=2x \Rightarrow f'(x)=2\cdot 4=8$$

$$P_3''(4)=\frac{5}{4}-\frac{17}{2}-0+\frac{37}{4}=2$$

Newton İnterpolasyonu Yardımıyla Türev

Eşit aralıklı ayrık noktaların verilmesi durumunda Newton ileri fark interpolasyon formülü $s=\dfrac{x-x_0}{h}$ alarak

$$\begin{aligned}P_n(x)&=P_n(x_0+sh)\\&=f_0+s\Delta f_0+\frac{s(s-1)\Delta^2 f_0}{2!}+\ldots+\frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)\Delta^n f_0}{n!}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f(x_0)\rightarrow \text{Newton ileri fark interpolasyonu}\end{aligned}$$

Şeklindedir. Bu eşitlikte x değişkenine bağlı türev alınarak, sayısal türev belirlenebilir.

Her iki tarafın x' göre türevi alınırsa

$$f'(x)\approx\frac{dP}{ds}\frac{ds}{dx}=\frac{1}{h}\frac{dP}{ds}=\frac{1}{h}\left[\Delta f_0+\frac{(2s-1)}{2}\Delta^2 f_0+\ldots+\frac{d}{ds}\binom{s}{n}\Delta^n f_0\right]$$

n'e bağlı olarak $f'(x_0)$ için farklı formüller elde ederiz. İlk önce $n=1$ alalım

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{h}\Delta f_0=\frac{f_1-f_0}{2};\quad E=-\frac{h}{2}f''(\xi)$$

Olur. E interpolasyon polinomunun hatasını gösterir. Eğer $n=2$ olarak alırsak

$$f'(x)\approx\frac{1}{h}\left[\Delta f_0-\frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right]=\frac{1}{2h}\left[-3f_0+4f_1-f_2\right];\quad E=-\frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

Olarak elde ederiz.

Nümerik Türevde Hata: $I\subset R$ ve $f\in C^{n+2}[I]$ olmak üzere $x=x_i$ için $P'(x_i)$'in hatası

$$f'(x_i)-P'(x_i)=\frac{\psi'(x_i)f^{n+1}(\xi_i)}{(n+1)!}$$

Burada $\xi_i\in I$ ve

$$\psi'(x_i)=\prod_{j=0}^{n}(x_i-x_j)\ ,\quad j\neq i$$

Örnek: $x = 0.3(0.1)0.6$ için $f(x) = \cos x$ fonksiyonunu alarak Newton ileri fark interpolasyon polinomunu kullanarak $f'(0.3)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayınız. $x = x_0$ için

Çözüm: verilen fonksiyon için Newton ileri fark tablosu

i	x_i	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0.3	0.95534			
			-0.03428		
1	0.4	0.92106		-0.0092	
			-0.04348		0.00043
2	0.5	0.087758		0.00877	
			-0.05225		
3	0.6	0.82534			

$$f'(x_0) \cong P'(s) = P'(0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0\right] = \frac{1}{6h}\left[18 f_1 - 11 f_0 - 9 f_2 + 2 f_3\right]$$

$$= \frac{1}{0.1}\left[(-0.03428) - \frac{1}{2}(-0.00920) + \frac{1}{3}(0.00043)\right] = 0.29529$$

$s = \dfrac{x - x_0}{h} = 0$ ve $E(x_0) = f'(x_0) - P'(0) = \dfrac{-h^3}{4} f^{iv}(\xi)$, $\xi \in [0.3, 0.6]$ elde edilir.

$$E(0.3) = \frac{-(0.1)^3}{4}\frac{d^4}{\xi^4}\cos(\xi) = -0.00025\cos(\xi) \quad , \quad \xi \in [0.3, 0.6]$$

$$|E(0.3)| = 0.00025|\cos(\xi)| \le -0.00025\max|\cos(\xi)| = 0.00025\cos(0.3) = 0.00024 \quad , \quad \xi \in [0.3, 0.6]$$

Gerçek değer

$$f(x) = cosx \Rightarrow f'(x) = \sin x$$

$$f'(0.3) = -0.29552$$

Yapılan hesaplamadaki mutlak hata $e = |f'(0.3) - P'(0.3)| = 0.00023$ dir.

Kaynaklar

1. Fikri Öztürk web sitesi
   http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/index.html
2. Bilgisayar uygulamalı sayısal analiz yöntemleri (II. baskı)
   Doç. Dr.Eyüp Sabri TÜRKER
   Araş. Gör. Engin CAN
3. Nümerik Analiz
   Doç. Dr. Ömer AKIN
   A.Ü.F.F. Ders Kitapları YAYINI (1998)
4. Sayısal Yöntemler ve Matlab Uygulamaları
   Nurhan KARABOĞA(2012)
5. Fen ve Mühendislik için Nümerik Analiz
   Mustafa BAYRAM (2002)