

10 İKİ-BOYUTLU HARMONİK SALINICI (1 kütle+4 yay)

AMAÇ: Hava masası ya da hava düzlemi adından da anlaşılacağı üzere 2 boyutludur. O halde hareketi bu düzleme kısıtlanmış olan diskler 1 ya da 2 boyutlu hareketler yapabilirler. Daha önce yapılan deneylerden hareketlerin boyutlarının 1 veya 2 olduğu zaten biliniyordu ancak bu vurgunun şimdi yapılma ihtiyacı oluştu! Netice olarak, fizikteki en önemli hareketlerden biri olan harmonik salınım hareketini 2 boyuta taşıyarak zenginleşen fiziği anlama fırsatı değerlendirilmelidir.

TEORİK İNCELEME: Asıl konumuz olan iki-boyutlu harmonik salınıcının kuramsal incelemesini yapmadan evvel bazı ön bilgiler vermek yerinde olacaktır.

Herhangi bir andaki şekillenimi (en az) d_s tane parametreyle belirlenebilen bir sistemin serbestlik derecesinin d_s olduğu söylenir; örneğin düzlemde salınan bir sarkaç için $d_s = 1$ 'dir ve karşılık gelen parametre olarak ipin düşeyle yaptığı açı alınabilir. Bundan önceki iki deneyde de serbestlik derecesi $d_s = 1$ idi. Bu tür tek serbestlik dereceli¹ sistemlerin hareketli kısmının denge konumundan ayrılma miktarı

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (10.1)$$

fonsiyonu ile anlatılmaktaydı ve sistemi karakterize eden nicelik açısal frekans ω idi. A pozitif sabitine *genlik* (denge konumundan maksimum ayrılma miktarı) ve φ açısal niceliğine de *faz sabiti* (zamanın sıfırının seçiminin bir ölçüsü) denmekteydi, bu sabitler başlangıç koşulları ile belirlenirler. Hareketli kısmının zaman bağımlılığı (10.1) eşitliği ile verilen sistemlere *harmonik salınıcı* denmekteydi. Bu basit idealize edilmiş sistem, parçacıkların ve alanların kuantum teorilerinde de en temel rolü oynamaktadır.

Serbestlik derecesi bir arttığında neler olur? İki serbestlik dereceli sistemlere dair Doğa'da bir çok büyüleyici örnekler vardır. En güzel örnekler moleküller (amonyak molekülü NH_3) ve temel parçacıkları (nötral K mezonlarını) ihtiva eder, bunların çalışılması kuantum mekaniğini gerektirir. İki serbestlik dereceli bir sistemin genel hareketinin çok karmaşık bir görünüşü olabilir; hiçbir kısım basit harmonik hareket yapmayabilir.

Buna rağmen iki serbestlik derecesi ve çizgisel hareket denklemleri için en genel hareketin, eşanlı olarak oluşan iki bağımsız basit harmonik hareketin üst-üste gelmesinden (süperpozisyonundan) ibarettir. Aşağıda da tarifi verilecek olan bu iki basit harmonik hareketten her birine *normal kip* ya da basitçe *kip (mod)* denir. Uygun başlangıç koşulları ile sistemin bir ya da diğer kipte salındırılması mümkündür. Dolayısıyla hareketli kısımlar çiftlenmiş olmalarına rağmen kipler çiftlenmemişlerdir.

¹ Çizgisel yaklaşım nedeniyle kısıtlanmış.

Bir Kipin Özellikleri: Herhangi bir kipte, herhangi bir hareketli kısım basit harmonik harekete tabiidir. Tüm kısımlar aynı frekans ile salınır ve aynı anda (eşanlı olarak) denge konumlarından geçerler (yani fazları aynıdır). O halde herhangi bir kipte (biz buna i . kip diyelim) her bir serbestlik derecesi (hareketli kısım) *aynı frekans ve sabit fazda* salınırlar. Buradaki inceleme iki serbestlik derecesi (bunlara **a** ve **b** diyelim) ile ilgili olduğundan i . kipte ($i=1,2$)

$$\psi_a(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$\psi_b(t) = B_i \cos(\omega_i t + \varphi_1)$$

olacaktır. Bazı hatırlanılması gereken ayrıntılar sırasıyla şunlardır:

(i) Üstte belirtildiği üzere denge konumundan geçme anlarında (örneğin $t_k(i)$ anında)

$$\psi_a(t_k(i)) = 0 = \psi_b(t_k(i))$$

eşitliği sağlanır, burada

$$t_k(i) = [(2k + 1)\pi/2 - \varphi_i]/\omega_i ; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

olduğu hemen görülür. Elbette her yarım periyotta bir denge konumundan geçildiği için $t_{k+1}(i) - t_k(i) = T/2$ olmak zorundadır.

(ii) Serbestlik derecesi bir-den fazla olduğu zaman A_i ve/veya B_i negatif sabitler olabilecekleri için i . kip için a (b) serbestlik derecesine karşılık gelen genlik $|A_i|$ ($|B_i|$) olacaktır.

(iii) Salınım boyunca herhangi bir kip için, sistem denge şekilleniminde (konfigürasyonunda) değilken (yani $t \notin \{t_k\}$ iken)

$$\frac{\psi_b(t)}{\psi_a(t)} = \frac{B_i}{A_i}$$

eşitliği geçerlidir $\psi_b(t)/\psi_a(t)$ oranı zamandan bağımsızdır.

(iv) Her bir kip için sistemin kendine ait bir karakteristik frekansı mevcuttur:

$$i. \text{ kip için } \omega_i$$

ve her bir kip için sistemin kendine has bir "şekillenimi" veya "şekli" vardır. Bu ise hareketli kısımların (ya da serbestlik derecelerinin) o kipe ait (i . kip) genlik ve işaret oranları

$$\frac{A_i}{B_i}$$

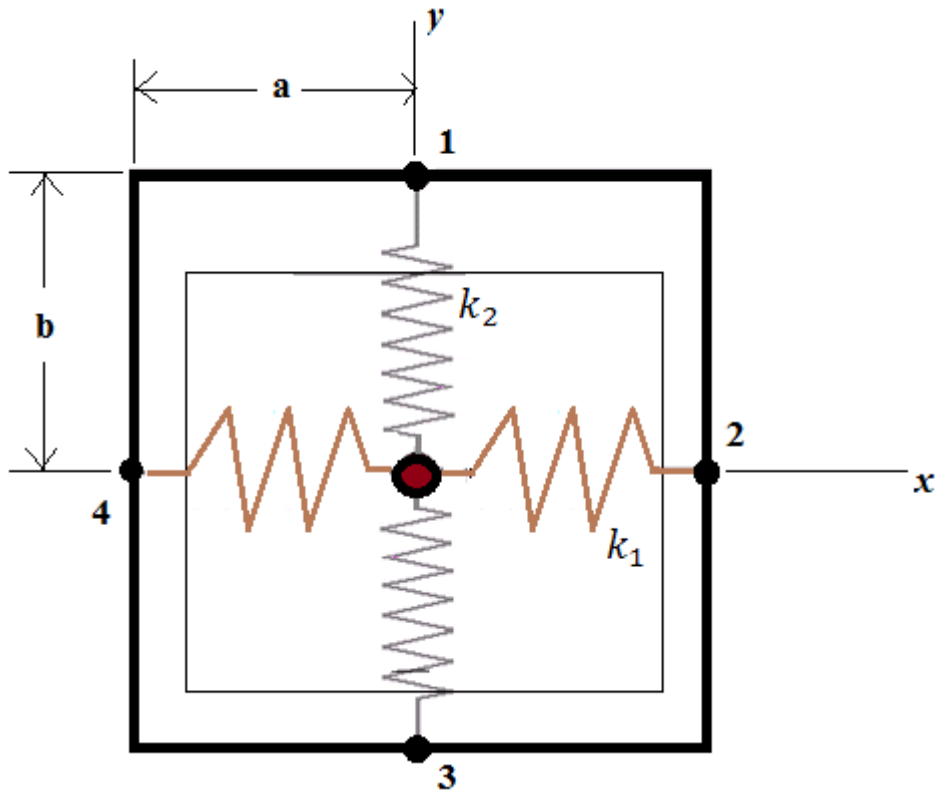
ile verilir. Böylelikle *iki serbestlik derecesi* ve *çizgisel hareket denklemleri* için en genel hareket bir kerede her iki kipin de iştirak ettiği süperpozisyon olacaktır:

$$\psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (10.2a)$$

$$\psi_b(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (10.2b)$$

Eğer sistemde birden fazla sayıda kip eşitse o kip o sayı kadar *dejenere* denir. Örneğin 2 serbestlik dereceli olan *küresel sarkacın* iki kip frekansı da aynıdır dolayısıyla bir dejenere sistemdir.

İki-boyutlu bir harmonik salıncığı 1 kütle (diskimiz) ve 4 yay kullanarak oluşturabiliriz. Basitlik olması amacıyla komşu yaylar birbirlerine dik olacak şekilde yerleştirilsin ve denge şekilleniminde aynı çizgi üzerinde olan yaylar da özdeş alınsınlar. Denge şekilleniminde yayların serbest uzunlukta olup olmamasının bir önemi yoktur, çünkü her bir yay diske bir kuvvet etki ettiriyor olmasına rağmen net kuvvet sıfırdır. Denge noktası Şekil 10.1'de de görüldüğü üzere (0,0) koordinat ikilisi ile anlatılan noktadır.



ŞEKİL 10.1

Basitlik olması amacıyla yayları zig-zaglı çizgilerle değil de düz çizgilerle temsil edelim ve diski x yönünde ve y yönünde öteleyerek yayları Şekil 10.2'deki gibi sıkıştırdığımızı / gerdiğimiz düşünelim. Şekil 10.2'yi esas alarak yayların uzunluklarının değişim miktarlarını, diske etki ettirdikleri kuvvetlerin büyüklüklerini ve diske eden net kuvveti hesaplayalım. Kuvvet vektörel olduğundan yönler için açılara da ihtiyaç duyulacaktır:

$$\|\vec{O_1P}\| = \sqrt{x^2 + (b - y)^2}$$

$$\|\vec{O_2P}\| = \sqrt{y^2 + (a - x)^2}$$

$$\|\vec{O_3P}\| = \sqrt{x^2 + (b + y)^2}$$

$$\|\vec{O_4P}\| = \sqrt{y^2 + (a + x)^2}$$

$\theta_1 := \angle O_1P$, $\theta_2 := \angle O_2P$, $\theta_3 := \angle O_3P$ ve $\theta_4 := \angle O_4P$ açıları tanımlandıktan sonra

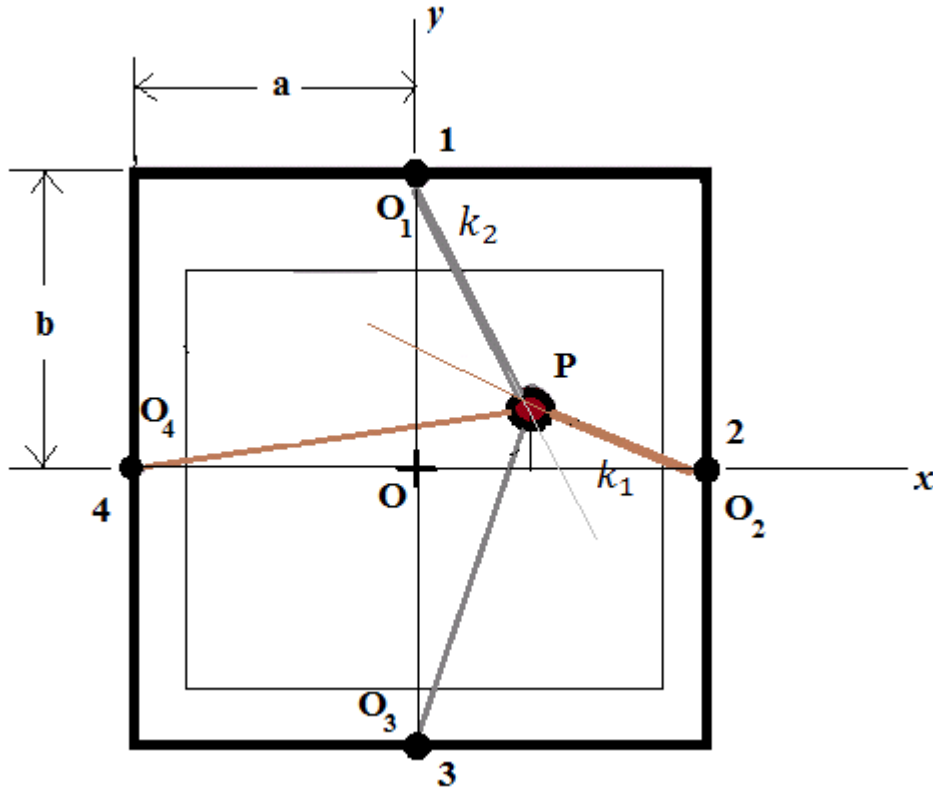
$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (b - y)^2}}, \cos\theta_1 = \frac{b - y}{\sqrt{x^2 + (b - y)^2}},$$

$$\sin\theta_2 = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}}, \cos\theta_2 = \frac{a - x}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}},$$

$$\sin\theta_3 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (b + y)^2}}, \cos\theta_3 = \frac{b + y}{\sqrt{x^2 + (b + y)^2}},$$

$$\sin\theta_4 = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (a + x)^2}}, \cos\theta_4 = \frac{a + x}{\sqrt{y^2 + (a + x)^2}}$$

trigonometrik eşitliklerine ulaşılır.



ŞEKİL 10.2

Her bir yayın diske etki ettirdiği kuvvetin büyüklüğü sırasıyla

$$\|\vec{F}_1\| = k_2 \left(b - \sqrt{x^2 + (b - y)^2} \right),$$

$$\|\vec{F}_2\| = k_1 \left(a - \sqrt{y^2 + (a-x)^2} \right),$$

$$\|\vec{F}_3\| = k_2 \left(\sqrt{x^2 + (b+y)^2} - b \right),$$

$$\|\vec{F}_4\| = k_1 \left(\sqrt{y^2 + (a+x)^2} - a \right)$$

bulunur. Diske etki eden net kuvvet $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$ olacağı için

$$F_x = k_2(b - \sqrt{x^2 + (b-y)^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2+(b-y)^2}} - k_1(a - \sqrt{y^2 + (a-x)^2}) \frac{a-x}{\sqrt{y^2+(a-x)^2}} \\ - k_2(\sqrt{x^2 + (b+y)^2} - b) \frac{x}{\sqrt{x^2+(b+y)^2}} - k_1(\sqrt{y^2 + (a+x)^2} - a) \frac{a+x}{\sqrt{y^2+(a+x)^2}} \quad (10.3a)$$

ve

$$F_y = -k_2(b - \sqrt{x^2 + (b-y)^2}) \frac{b-y}{\sqrt{x^2+(b-y)^2}} + k_1(a - \sqrt{y^2 + (a-x)^2}) \frac{y}{\sqrt{y^2+(a-x)^2}} \\ - k_2(\sqrt{x^2 + (b+y)^2} - b) \frac{b+y}{\sqrt{x^2+(b+y)^2}} - k_1(\sqrt{y^2 + (a+x)^2} - a) \frac{y}{\sqrt{y^2+(a+x)^2}} \quad (10.3b)$$

eşitlikleri bulunur. (10.3a) ve (10.3b) Newton hareket denklemleri 2. mertebeden çizgisel olmayan çiftlenmiş diferensiyel denklem sistemi oluştururlar. İki serbestlik derecesi için (10.2) genel çözümü denklemlerin çizgisel olmasının bir sonucu, küçük salınımlar yaklaşımı ve 2. ve daha yüksek dereceden koordinat fonksiyonu içeren terimlerin ihmal edilmesiyle istenilen varsayıma (çizgiselliğe) ulaşılır. Fiziksel olarak bu yaklaşım, diske etki eden net kuvvetin herhangi bir bileşenin, o bileşene dik doğrultudaki yerdeğıştirmelerden bağımsız olmasına karşılık gelmektedir. Küçük salınımlar yaklaşımıyla ($x \ll (b \pm y)$ ve $y \ll (a \pm x)$) (10.3) ve (10.4) sırasıyla

$$F_x \approx k_2(b - (b-y)) \frac{x}{(b-y)} - k_1(a - (a-x)) - k_2((b+y) - b) \frac{x}{(b+y)} - k_1((a+x) - a) \\ = -2k_1x + k_2xy \left(\frac{1}{(b-y)} - \frac{1}{(b+y)} \right) \approx -2k_1x + k_2 \frac{xy^2}{b^2} \left(1 + \frac{xy^2}{b^2} \right)$$

ve yüksek dereceli terimler ihmal edilince

$$F_x = -2k_1x \quad (10.4a)$$

ve benzer olarak

$$F_y = -2k_2y \quad (10.4b)$$

denklemleri elde edilir; yukarıdaki yaklaşık eşitliklerde *Taylor'un seri açılımı* kullanılmıştır. Bu iki çizgisel denklemin çözümleri

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad \omega_1^2 = 2k_1/m \quad (10.5a)$$

$$y(t) = B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad \omega_2^2 = 2k_2/m \quad (10.5b)$$

şeklinde (m diskin kütlesidir), x ve y hareketleri çiftlenmemişlerdir ve her biri kendi frekansıyla basit harmonik hareket yapmaktadır; tam bu noktada serbestlik derecesiyle hareketli kısım kavramlarının aynı oldukları görülebilir: hareketli kısımlar sırasıyla x ve y nicelikleridirler, noktasal varsayılan diskin kendisi kastedilmemiştir! A_1 ve φ_1 sabitleri $x(0)$ ve $\dot{x}(0)$ başlangıç değerlerine; B_2 ve φ_2 sabitleri de $y(0)$ ve $\dot{y}(0)$ başlangıç değerlerine bağlıdır:

$$x(0) = A_1 \cos\varphi_1 \quad , \quad \dot{x}(0) = -A_1 \omega_1 \sin\varphi_1 \quad (10.6a)$$

$$y(0) = B_2 \cos\varphi_2 \quad , \quad \dot{y}(0) = -B_2 \omega_2 \sin\varphi_2 \quad (10.6b)$$

yani A_1 , φ_1 , B_2 ve φ_2 sabitleri *elle ayarlanabilirler*, yani yayları uygun bir biçimde gererek ve diski uygun bir şekilde fırlatarak. Frekanslar baz alındığında hareket iki kategoriye ayrılabilir:

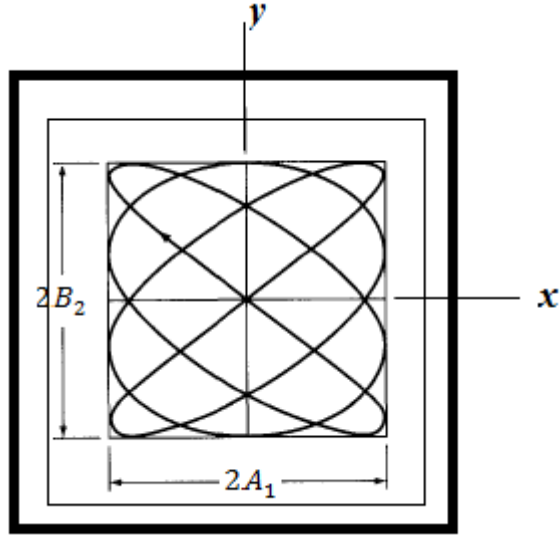
(i) Dejenere Durum ($\omega_1 = \omega_2$),

(ii) Dejenere Olmayan Durum ($\omega_1 \neq \omega_2$).

Hem zaman kısıtlaması söz konusu olduğu için hem de zorluk açısından, dejenere olmayan durum deneysel olarak gerçekleştirilmeyecektir (Daha ileri bir kursun deneyi olarak bu durumun da deneysel olarak gözlemlenmesi ve incelenmesi yerinde olacaktır: örneğin DALGALAR kursu deneylerinin de içerildiği başka bir laboratuvar dersi oluşturulursa!). Ancak dejenere durumu incelemeyen evvel, dejenere olmayan durum hakkında da bazı bilgiler vermek, tamlik açısından gereklidir.

(ii) Dejenere Olmayan Durum ($\omega_1 \neq \omega_2$)

Birinci ve ikinci kip açısal frekanslarının farklı olduğu durumda (10.5) sistemine karşılık gelen yörünge bir *Lissajous eğrisi* olacaktır. Düzenli zaman aralıklarında hareket kendini tekrar ederse böyle bir eğri *kapalı* olacaktır. Bu ancak açısal frekansların oranının rasyonel bir kesir olması durumunda mümkündür; örneğin $\omega_2/\omega_1 = 3/4$ ve $\varphi_1 = \varphi_2$ için gözlemlenecek olan yörünge şekli

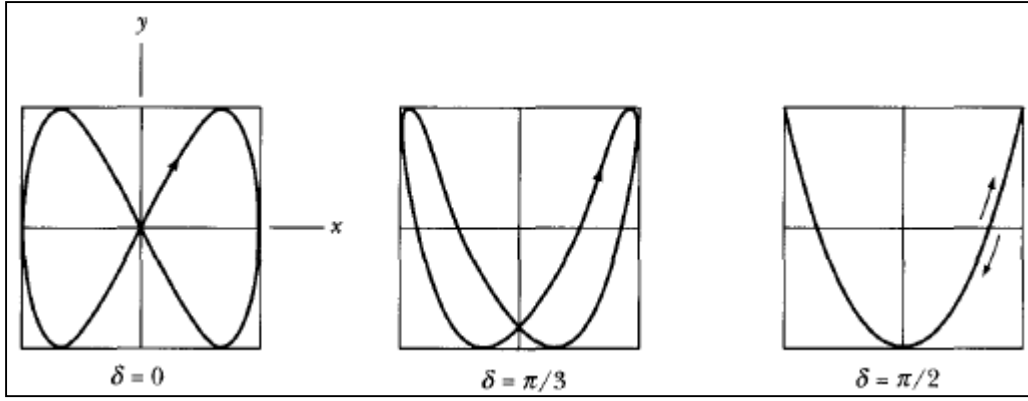


ŞEKİL 10.3

biçiminde olan Lissajous eğrisi olacaktır.

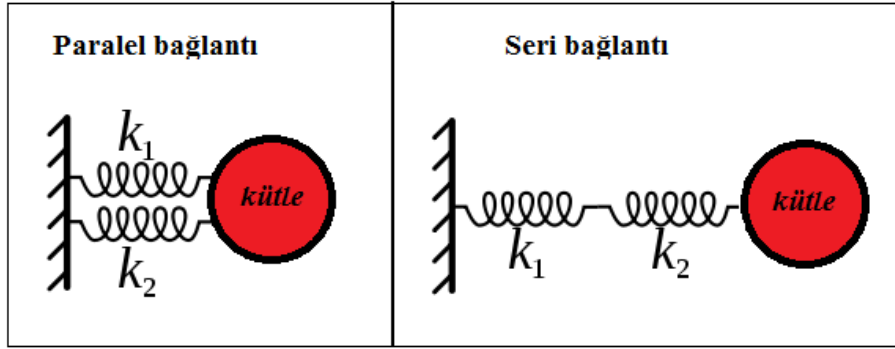
Açısal frekansların oranı rasyonel bir kesir değilse bu durumda yörünge açık olacaktır yani hareketli parçacık asla aynı noktadan aynı hızla iki defa geçmeyecektir. Böylelikle “yeterince uzun bir süre” geçtiğinde, parçacığın $2A_1 \times 2B_2$ alanlı dikdörtgen içindeki herhangi bir noktaya yakınlığı keyfi derecede küçük bir mesafe olacaktır; dolayısıyla dikdörtgeni “dolduracak”tır (Uzay-dolduran eğriler konusu başlı başına matematikteki bir çok disiplinin kesişiminde kendini gösteren bir alt dal olarak düşünülebilir).

İki-boyutlu harmonik salıncı , parametrelerinden herhangi birindeki sonsuz küçük bir değişimin çok farklı nitelikteki hareketlere yol açtığı sistemlere bir örnektir. Açısal frekanslarının oranının tam bir rasyonel kesir olması yörünge için kapalı eğriler verirken, rasyonellikten sonsuz küçük bir sapma açık eğrilerden ibaret yörüngeler verecektir. Yani kapalı yörüngeler elde edebilmek için frekans oranının sonsuz duyarlılıkta bir rasyonel kesir olması gerekmektedir. Örneğin x ve y yönündeki hareketlerin frekansları farklıyken oluşan Lissajous eğrisinin şekli, faz farkı $\delta := \varphi_1 - \varphi_2$ niceliğine kuvvetli bir şekilde bağlıdır; $\omega_2 = 2\omega_1$ ve δ 'nın farklı bazı değerleri için elde edilen Lissajous eğrisi biçimleri aşağıdaki gibi olmaktadır:



ŞEKİL 10.4 a,b,c

Peki laboratuvarında deney yaparken, yukarıda değinilen sonsuz duyarlılığa ulaşılabilir mi? Bu soru için öğrenciye olumlu yanıt verebilecek bir fikir, Hooke tipi yayların seri veya paralel olarak birleştirilmeleri neticesinde elde edilen bileşik yay sistemlerinin hatırlatılmasıyla verilebilir.



ŞEKİL 10.5

Bu birleşik sistemlere mekaniksel olarak eşdeğer olan birleşik olmayan (tek yaylı) sistemin yay sabitinin değeri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\text{Paralel bağlantı: } k_{eş} = k_1 + k_2, \quad (10.7a)$$

$$\text{Seri bağlantı: } \frac{1}{k_{eş}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \quad (10.7b)$$

Not: 1) Hooke tipi yaylar belirli bir aralıkta gerildiğinde ya da sıkıştırıldığında yay sabitleri değişmemektedir. 2) Bir yay eşit uzunlukta parçalara bölündüğünde, her bir yeni parçanın yay sabiti ana yayın sabitinin parça sayısı ile çarpımı kadardır; yani Hooke sabiti k olan ana yay eşit uzunluklu n parçaya bölünmüşse her bir parçanın yay sabiti nk' dir.

Şimdi deneysel olarak icra edilecek olan dejenere durumun kinematiğini irdeleyelim.

(i) Dejenere Durum ($\omega_1 = \omega_2$)

(10.5) eşitlikleri ile verilen çözümler, dejenere durum için $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $k_1 = k_2 = k$, $A_1 = A$ ve $B_2 = B$ olacak biçimde yeniden düzenlenince

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_1), \quad (10.8a)$$

$$y(t) = B \cos(\omega t + \varphi_2), \quad \omega^2 = 2k/m \quad (10.8b)$$

halini alırlar. Böylelikle en genel hareket her bir doğrultuda aynı frekanslı ancak farklı genlikli ve farklı fazlı iki harmonik salınım hareketinin üst-üste gelmesi ile belirlenecektir. Bu iki denklem arasında t zaman parametresi yok edilerek noktasal parçacığın (yani diskimizin) yörünge denkleminde ulaşabiliriz. Uygun düzenlemeleri yaparak ve trigonometrik eşitlikleri kullanarak birleşik denklem

$$\begin{aligned} y(t) &= B \cos(\omega t + \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi_2)) \\ &= B \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + B \sin(\omega t + \varphi_1) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

halini alır ve (10.8) denklemleri ve faz farkı δ kullanılarak

$$y = B \frac{x}{A} \cos\delta + B \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \sin\delta$$

bulunur, veya eşdeğer olarak

$$Ay - Bx \cos\delta = B\sqrt{A^2 - x^2} \sin\delta$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$A^2 y^2 - 2AB xy \cos\delta + B^2 x^2 \cos^2\delta = B^2 A^2 \sin^2\delta - B^2 x^2 \sin^2\delta$$

ve düzenleme yapılırsa yörünge denklemi için

$$B^2 x^2 - 2AB xy \cos\delta + A^2 y^2 = A^2 B^2 \sin^2\delta \quad (10.9)$$

genel ifadesine ulaşılır.

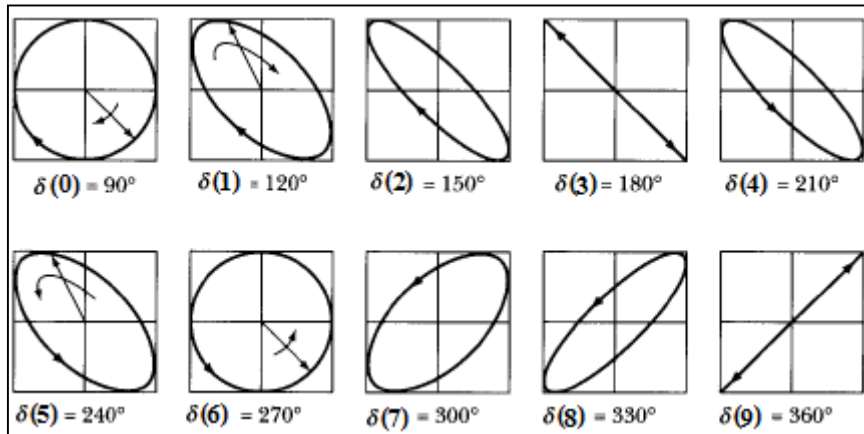
Genlikler ve faz farkı için uygun kısıtlamalar koyarak diskin hareketi ile ilgili bilgileri aşağıdaki tablodan öğrenebiliriz.

A, B	δ	Yörünge Denklemi	Yörünge	Yönelim / Eğim	
$ A \neq B $	$\pm \frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$	ELİPS	SOL ELLİ SAĞ ELLİ	---
$ A = B $	$\pm \frac{\pi}{2}$	$x^2 + y^2 = A^2$	ÇEMBER	SOL ELLİ SAĞ ELLİ	---
$ A \neq B $	$0, 2\pi$	$y = \frac{B}{A}x$	DOĞRU	---	POZİTİF
$ A \neq B $	$\pm \pi$	$y = -\frac{B}{A}x$		---	NEGATİF

TABLO 10.1

Tabloda, örneğin ilk satırda Sol Elli yönelim, faz farkı δ 'nın $+\pi/2$ değerine karşılık gelmektedir ve benzer biçimde Sağ Elli yönelim de δ 'nın $-\pi/2$ değerine karşılık gelmektedir. Tablo 10.1'de yönelimi/eğimi belirleyen nicelik faz farkı δ imiş gibi görünmektedir ancak bu sadece A ve B 'nin her ikisinin de pozitif olduğu durumda doğrudur; yani tablo oluşturulurken bu varsayılmıştır. δ ile beraber A 'nın ve B 'nin diğer olası işaretleri de göz önüne alınsaydı yukarıdaki tabloya ek olarak üç tane daha benzer tablo oluşturmak gerekecekti ancak sonunda oluşan şekillenimlerin kümesi hepsi için aynı olacaktı sadece bunların oluşma sıraları yer değiştirecekti.

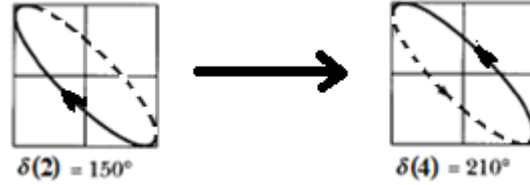
$A = B$ ve $\delta(n) = 90^\circ + n 30^\circ$ için yörünge şekli ve yönelimi/eğimi aşağıdaki şekilde verilmektedir.



ŞEKİL 10.6

Dikkat edilecek olursa ve biraz hayal gücü devreye sokulursa, n 'yi 0'dan 9'a kadar değer alan bir tam sayı değişkeni olarak değil de sürekli olarak 0'dan 9'a monoton artan bir reel sayı değişkeni olarak düşünecek olursak A kenar uzunluklu karenin sağ-el köşegeninden $\delta(0)$ çemberini sıkıştırarak ve bir doğruya ulaştığımızda gererek adım adım $\delta(9)$ doğrusuna

ulaşabiliriz. $\delta(2)$ elipsinden $\delta(4)$ elipsine ulaşılırken, sağ-el köşegenine göre $\delta(2)$ elipsinin üst yayı ile alt yayı $\delta(3)$ doğrusunda iken çakışmış ve n deformasyon parametresinin sonuz küçük bir artışına karşılık gelen şekillenimde yer değiştirmişlerdir ($n = 3$ değerinde deformasyon dönüşümü süreksizdir); yani $\delta(2)$ elipsindeki üst (alt) yay, $\delta(2)$ elipsindeki alt (üst) yaydır. İşte bu sebeptir ki elipslerin uzaysal yönelimleri de farklıdır, ya da tek bir elips vardır ve ara aşamada yönelim değiştirmiştir diye de düşünülebilir.



Burada yapılan inceleme ile tek renkli bir düzlem elektromagnetik dalganın kinematiği ayırdır, (10.8) eşitliklerinin ilki elektromagnetik dalganın elektrik alan bileşenine ve ikincisi de magnetik alan bileşenine karşılık getirildiğinde Sekil 10.6 daki şekillenimler de elektromagnetik dalganın kutuplanma biçimlerine karşılık geleceklerdir!

Son olarak deneyin yapılışına geçmeden önce deney esnasında da büyük önem taşıyacak olan başlangıç koşullarını Tablo 9.1 için

$$x(0) = A \cos \varphi_1 \quad , \quad \dot{x}(0) = A \omega \sin \varphi_1 \quad (10.10a)$$

$$y(0) = B \cos \varphi_2 \quad , \quad \dot{y}(0) = -B \omega \sin \varphi_2 \quad (10.10b)$$

eşitliklerini kullanarak hesaplayalım ve bunlardan başka bir tablo oluşturalım, basitlik olması amacıyla $\varphi_1 = 0$ ve haliyle $\varphi_2 = \delta$ alalım:

$$x(0) = A \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (10.11a)$$

$$y(0) = B \cos \varphi_2 \quad , \quad \dot{y}(0) = -B \omega \sin \varphi_2 \quad (10.11b)$$

A, B	δ	$(x(0), y(0))$	$(\dot{x}(0), \dot{y}(0))$	Yörünge	Yönelim / Eğim	
$ A \neq B $	$+\frac{\pi}{2}$	$(A, 0)$	$(0, -B\omega)$	ELİPS	SOL ELLİ	---
	$-\frac{\pi}{2}$	$(A, 0)$	$(0, B\omega)$		SAĞ ELLİ	---
$ A = B $	$+\frac{\pi}{2}$	$(A, 0)$	$(0, -A\omega)$	ÇEMBER	SOL ELLİ	---
	$-\frac{\pi}{2}$	$(A, 0)$	$(0, A\omega)$		SAĞ ELLİ	---

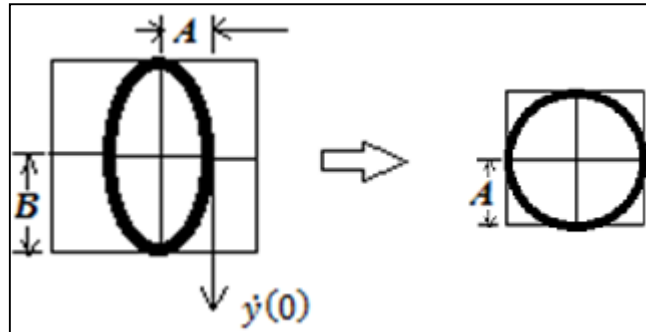
$ A \neq B $	$0, 2\pi$	(A, B)	$(0, 0)$	DOĞRU	---	POZİTİF
$ A \neq B $	$\pm\pi$	$(-A, -B)$	$(0, 0)$		---	NEGATİF

TABLO 10.2

Tablo 10.1 ve 10.2’de $A, B > 0$ varsayılmış olmasına rağmen ilk sütunda bu reel niceliklerin mutlak değerlerinin muhafaza edilmesinin sebebi, bir-den fazla serbestlik dereceli sistemlerde genlik kavramının anlamlandırılabilmesi için mutlak değer fonksiyonunun kullanılma gerekliliğiydi. Bilinmesi gereken bir hususta Şekil 10.6’nın aksine Tablo 10.2’deki elipslerin büyük ve küçük eksenleri dikey ve yatay eksenlerle çıkışacaklardır.

DENEYİN YAPILIŞI: Deneysel olarak 4 özdeş yay ve bir kütle kullanarak Tablo 10.2’deki salınım şekillenimlerinden istenilen şekillenim oluşturulabilir. Buradaki en önemli amaçlardan biri görsel olarak aynı klasik dinamiksel sisteme farklı yörüngelerin karşılık gelebileceğini gözlemlemektir, dolayısıyla en az iki farklı tipte yörüngeyi deneysel olarak gerçekleştirmek gereklidir. Şimdi örnek olması açısından sol-elli eliptik şekillenim durumuna konsantre olalım. Öncelikle hava masasının cam yüzeyi yatay olacak şekilde masa bacakları ayarlanmalıdır, bunun için bir su terazisi de kullanılabilir. Cam yüzeyindeki yerel eğrilikler deneysel hataları arttıracaktır. 4 özdeş yay hava masasına ve diske, Şekil 10.1’deki görünüm esas alınarak bağlanmalıdır. Sistem öncelikle denge konumuna getirilmelidir; bu amaçla ilgili bağlantılar yapıldıktan sonra hava pedalına basılmalı ve eğer disk hareket ederse (ihmal edilen sürtünme kuvvetlerinin etkisiyle) durgun hale gelene kadar beklenmelidir. Hava pedalı kapatıldıktan sonra denge konumu, kıvılcım pedalına basılarak beyaz kağıda işaretlenmelidir.

Sol-elli eliptik yörüngeyi oluşturabilmek amacıyla disk +x yönünde belirli bir miktar (A kadar) çekilmeli ve -y yönünde bir ilk sürat verilerek fırlatılmalıdır, bu sürat $B\omega$ niceliğine karşılık gelecektir; yani salınımın y eksenine düşümünün maksimum süratini².

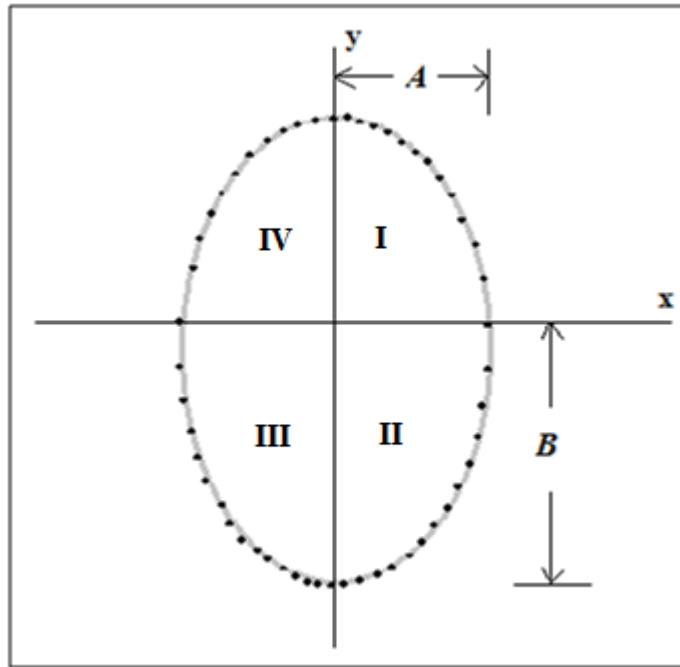


² Eğer sol-elli bir çember elde edilmek istenseydi çok hassas davranılması gerekecekti; çünkü -y yönünde verilen ilk hız öyle ayarlanmalıdır ki hızın y bileşeni sıfır olduğunda -y yönündeki uzanım A olsun.

Düzgün bir eliptik yörünge elde edebilmek için belki de birden fazla ölçüm almak gerekebilir, ancak bu pratik olarak zordur. Bunun nedeni iz alınan beyaz kağıdın masa yüzeyine (cama) sabitlenmiş olmasıdır, kağıdın temiz bir bölgesine ya da başka bir kağıda yeniden iz bırakmak için tüm (örneğin denge konumunun tayini gibi) işlemleri yeniden tekrar etmek gerekecektir. O halde bir kerede en iyi ölçümü yakalamak için çaba sarf edilmelidir.

Ancak bunun da bir çaresi vardır, bir ölçüm tamamlandıktan sonra bir sonraki ölçüme geçildiğinde $+x$ yönünde disk öncekine göre daha çok gerilmeli ve $-y$ yönünde de öncekine göre daha hızlı fırlatılmalıdır ki yeni elips önceki elipsle kesişmesin. Böylelikle ardışık olarak birkaç ölçüm alınarak aynı kağıtta eş-merkezli, eş-eksenli bir biri ile kesişmeyen elipsler elde edilecektir (bkz. Şekil 10.9). Eğer elipsler kesişecek şekilde ölçüm alınmışsa bu büyük bir sorun teşkil etmeyecek, sadece farklı elipslere ait noktaların birbiri ile karışması riskini doğuracaktır. Karışıklık oluşmaması için verilerin analizi ve yorumu kısmının sonunda karşılaşılabilecek olan hesaplama tablolarına kadar sadece tek bir ölçüm (elips) ile ilgilenilecektir.

Netice olarak tam bir salınım tamamlandığında ölçüm sonlandırılmalıdır; yani kıvılcım pedalı devre dışı bırakılmalı ve hava pedalı çalışmaya devam ederken dış etkiyle disk durdurulmalıdır ve sonra hava pedalı da serbest bırakılmalıdır. Kağıt ters çevirildiğinde gözlenecek olan şekil aşağıdaki şekil gibi olacaktır; diskin başlangıç konumu x eksenindeki iki noktadan soldaki olmasına rağmen simetri nedeniyle koordinat eksenleri aşağıdaki gibi konumlandırılabilir, ideal bir deneyde kağıt üzerine en son işlenecek nokta da bu soldaki noktadır.



ŞEKİL 10.7

VERİLERİN ANALİZİ VE YORUMU:

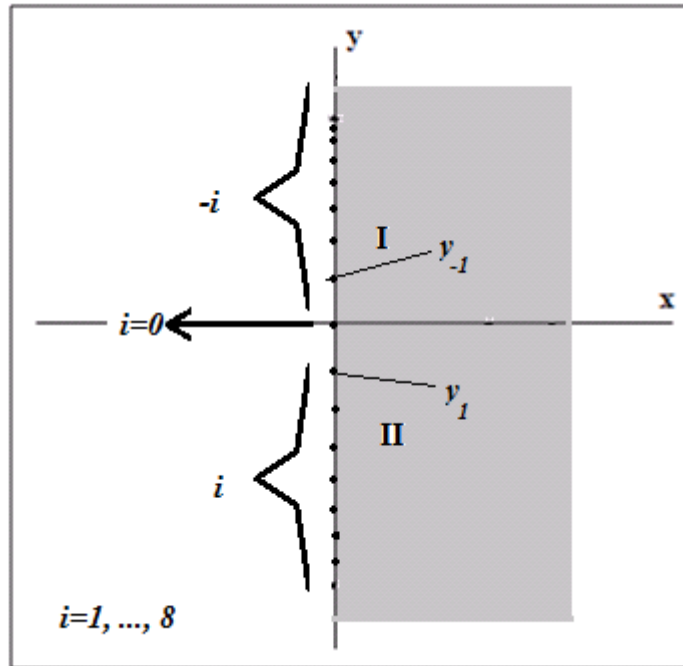
Buradan A ve B bir cetvel yardımıyla ölçülebilir; deneysel olarak periyodu hesaplayabilmek için elips üzerindeki noktalar yatay ya da düşey eksen üzerine dik olarak iz düşürülmelidirler. Hareketin her iki eksen üzerindeki frekansı eşit olduğu için sadece düşey ya da sadece yatay eksen tercih edilebilir, bir Lissajous eğrisi incelenseydi her iki eksen üzerine de ayrı ayrı iz düşüm yapılacak ve her biri ayrı ayrı incelenecekti. Örneğin düşey eksen seçilirse Şekil 10.7'deki her bir çeyrek bölge için ayrı ayrı bu iz düşürmeler yapılmalıdır; böylelikle her bir çeyrek periyot için sırasıyla N_I , N_{II} , N_{III} ve N_{IV} tane aralık olacaktır. O halde çeyrek periyot için ortalama aralık sayısı

$$\bar{N} = \frac{N_I + N_{II} + N_{III} + N_{IV}}{4} \quad (10.12)$$

olacaktır ve deneysel periyot veya açısal frekans da

$$T_d = 4 \frac{1}{f_{st}} \bar{N} = 2\pi / \omega_d \quad (10.13)$$

eşitliklerinden bulunabilirler. $|\dot{y}(0)|$ deneysel olarak bulunurken sabit ivme durumundaki metod pek uygun olmayacaktır ancak genede kıyaslama yapabilmek açısından gerçekteki değerine yakın bir değere, deneysel verileri kullanarak ulaşabileceğimiz bir hesaplama yapabilmeliyiz. Hata payını azaltmak için böyle bir hesaplamayı kıvılcım makinesinin frekansının yüksek olduğu bir durum için yapmalıyız! Her ne kadar bizim oluşturduğumuzda hareketin ilk çeyreği II. Bölge ile belirleniyor olsa da simetrisinin yardımıyla $|\dot{y}(0)|$ hesabını I. ve II. bölgedeki elips noktalarını düşey eksene iz düşürerek elde edilen noktalar dağılımı yardımıyla bulabiliriz. Dağılım aşağıdaki gibi ise



başlangıç hızının y

ŞEKİL 10.8

(10.14)

$$\dot{y}(0) = \lim_{i \rightarrow 0} \frac{y_i - y_{-i}}{2i \Delta T} \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2 \Delta T}$$

yaklaşık eşitliğiyle hesaplayabiliriz öyle ki $\Delta T = 1/f_{st}$ 'dir. Esasen burada i kesikli bir indistir yani $i \rightarrow 0$ limiti ancak şu şekilde anlamlı olabilir; $y_0 := y(0)$ olarak tanımlanırsa $y_i = y(i\Delta T)$ ve haliyle $y_{-i} = y(-i\Delta T)$ olacaktır. Böylelikle limit sürekli bir parametre cinsinden

$$\dot{y}(0) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{y(i\Delta T) - y(-i\Delta T)}{2i \Delta T}$$

olarak yazılabilir, bu ise aslında kıvılcım atma frekansının sonsuz olmasına karşılık gelir. Sonuç olarak iyi bir $\dot{y}(0)$ değeri elde edebilmek için kıvılcım atma frekansını olası en yüksek değerinde tutmamız gerekmektedir!

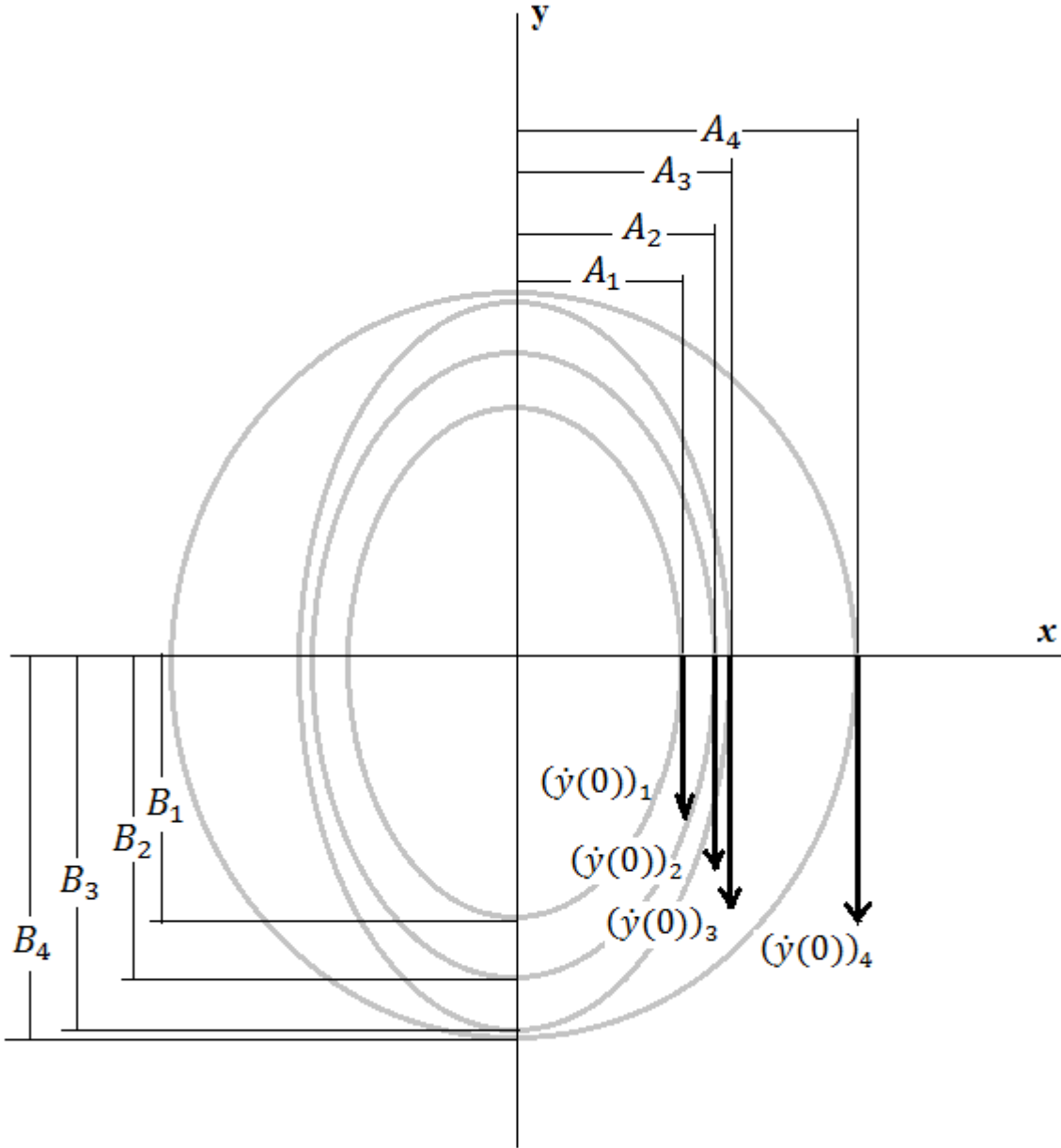
Artık hesaplamalara geçilebilir! Bunun için Şekil 10.9 esas alınabilir. Şekil 10.9, diskin dört farklı başlangıç konumu ($i = 1,2,3,4$)

$$(x(0), y(0)) = (A_i, 0)$$

ve dört farklı başlangıç hızı

$$(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0, (\dot{y}(0))_i)$$

ile harekete başlatılmasına karşılık gelmektedir.



ŞEKİL 10.9

Laboratuvarda deneyin üç tane farklı başlangıç koşulu için gerçekleştirilmesi yeterli olacaktır (zaman kısıtlıysa bu sayı iki bile olabilir). Öncelikle, k yay sabiti bulunmalı ve m disk kütlesi tartılmalıdır. Kivılcım pedalının frekansı olası en yüksek değerine ayarlandıktan sonra deney yapılmalıdır. A_i ve B_i bir cetvel yardımıyla ölçülerek bulunacaktır; \bar{N}_i ve $(T_d)_i$, (10.12) ve (10.13) eşitlikleri ile hesaplanacaklardır. (10.8b) eşitliğinden açısal frekansın teorik değeri hesaplanarak Tablo 10.3 ve Tablo 10.4 doldurulabilir.

$f_{st} = \text{--- Hz}$	A_i	B_i	\bar{N}_i	$(T_d)_i$
—				
—				
—				

Tablo 10.3

$T_t = 2\pi/\omega_t$	$(T_d)_1$	$(T_d)_2$	$(T_d)_3$
% fark			

Tablo 10.4

Başlangıç sürati için *teorik* değer, *yarı-teorik* değer ve *deneysel* değer bilindiği üzere sırasıyla

$$|(\dot{y}(0))_i|_t = |B_i| \omega_t ,$$

$$|(\dot{y}(0))_i|_{yt} = |B_i| (\omega_d)_i = (|B_i| 2\pi) / (T_d)_i ,$$

$$|(\dot{y}(0))_i|_d = f_{st} \frac{(y_1 - y_{-1})_i}{2}$$

eşitliklerinden hesaplanabilirler ve Tablo 10.5 doldurulabilir.

i	$ (\dot{y}(0))_i _t$	$ (\dot{y}(0))_i _{yt}$	$ (\dot{y}(0))_i _d$	% fark
1				
2				
3				

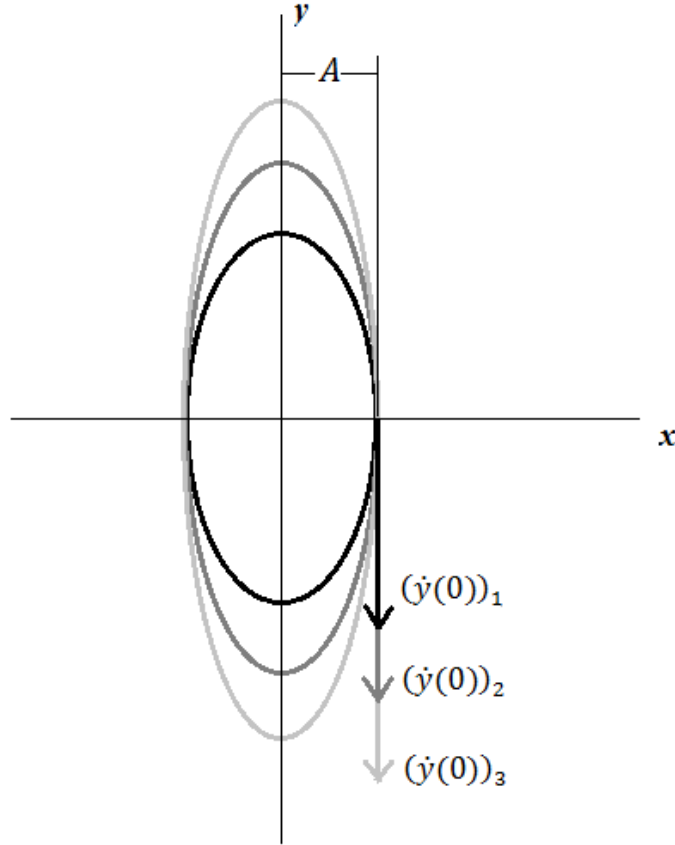
Tablo 10.5

Burada % fark

$$\frac{|(\dot{y}(0))_i|_t - |(\dot{y}(0))_i|_d}{|(\dot{y}(0))_i|_t} \times 100$$

olarak tanımlanmıştır.

İsteğe bağlı olarak başlangıç konumu sabit tutularak ve sadece başlangıç hızı değiştirilerek (üç farklı hız için) aşağıdaki şekle benzer bir şekil elde edilebilir. Her ölçüm sonucunda noktaların diğer ölçüm sonuçlarındakilerle karışmaması için kıvılcım pedalının beyaz kağıt üzerinde bıraktığı noktalar numaralandırılmalı ya da renklendirilmelidirler (örneğin 1. ölçümün ilk noktası 1.1, ikinci noktası 1.2 ... diye numaralandırılabilir veya 1. ölçümün tüm ya da ilgilenilen noktaları kırmızı kalemle renklendirilebilir, 2. Ölçümün noktaları da başka bir renkle örneğin mavi ile renklendirilebilir v.b.)



$f_{st} =$	Hz	$A_i = A =$	$ (\dot{y}(0))_i _d$	B_i	\bar{N}_i	$(T_d)_i$
—	—	—				
—	—	—				
—	—	—				

Tablo 10.6

$T_t = 2\pi/\omega_t$	$(T_d)_1$	$(T_d)_2$	$(T_d)_3$
% fark			

Tablo 10.7