İki Bilinmeyen Fonksiyonlu İki Denklemden Oluşan Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri

Bu bölümde iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + F_1(t) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + F_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

sistemi ele alınmaktadır. Burada a_1, a_2, b_1, b_2, F_1 ve F_2 fonksiyonları bir reel $a \leq t \leq b$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlardır. $F_1(t)$ ve $F_2(t)$ fonksiyonları her t için sıfır ise, bu durumda (1) sistemine *homogen sistem*, aksi durumda *homogen olmayan sistem* denir.

Tanım 1. (1) sisteminin bir çözümü her biri reel $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli türeve sahip olan reel f ve g fonksiyonlarının bir sıralı (f, g) ikilisidir. Başka bir ifadeyle

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \tag{2}$$

ikilisi $a \leq t \leq b$ için (1) sistemini özdeş olarak sağlarsa, bu durumda (2) ikilisi (1) sisteminin bir çözümüdür.

Teorem 1. (1) sistemindeki a_1, a_2, b_1, b_2, F_1 ve F_2 fonksiyonları $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli olsunlar. t_0, $a \leq t \leq b$ aralığının herhangi bir noktası ve x_0, y_0 verilen iki sabit olsun. Bu durumda (1) sisteminin $a \leq t \leq b$ aralığının tamamında tanımlı ve

$$x(t_0) = x_0, \ y(t_0) = y_0$$

koşullarını sağlayan bir tek

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

çözümü vardır.

Homogen Lineer Sistemler

(1) sistemindeki $F_1(t)$ ve $F_2(t)$ fonksiyonları her t için sıfır kabul edilirse, homogen lineer

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y \end{cases} \tag{3}$$

sistemi elde edilir.

Teorem 2.

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases} \tag{4}$$

(3) sisteminin iki çözümü ve c_1 ile c_2 iki keyfi sabit olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\ y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \end{cases} \tag{5}$$

çifti de (3) sisteminin bir çözümüdür.

Tanım 2. (5) çözümü (4) çözümlerinin bir lineer kombinasyonu olarak adlandırılır.

Tanım 3. $a \leq t \leq b$ aralığındaki her t için

$$\begin{aligned} c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = 0 \\ c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

denklemleri $c_1 = c_2 = 0$ halinde sağlanıyorsa, bu durumda (4) ile ifade edilen çözümler lineer bağımsızdır denir.

(6) denklemleri en az bir $c_i \neq 0,\ i = 1, 2,$ için sağlanıyorsa, bu durumda (4) ile ifade edilen çözümler lineer bağımlıdır denir.

Teorem 3. (3) homogen lineer sisteminin iki lineer bağımsız çözümü vardır. (3) sisteminin her çözümü bu iki lineer bağımsız çözümün bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

Tanım 4. (3) homogen lineer sisteminin iki lineer bağımsız çözümü

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

olsun. c_1 ve c_2 iki keyfi sayıyı göstermek üzere

$$\begin{cases} x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{cases}$$

çözümüne (3) sisteminin bir genel çözümü denir.

Teorem 4. (3) homogen lineer sisteminin iki çözümü

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

olsun. Bu iki çözümün $a \le t \le b$ üzerinde lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \tag{7}$$

determinantının $a \le t \le b$ aralığı boyunca sıfırdan farklı olmasıdır.

Teorem 5. Teorem 4 de tanımlanan (7) determinantı $a \le t \le b$ aralığı boyunca sıfırdır veya aralık boyunca sıfırdan farklıdır.

Örnek.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases} \tag{8}$$

sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} x = c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} \\ y = -3c_1 e^{5t} - c_2 e^{3t} \end{cases} \tag{9}$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Gerçekten

$$\begin{cases} x_1 = e^{5t} \\ y_1 = -3e^{5t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x_2 = e^{3t} \\ y_2 = -e^{3t} \end{cases} \tag{10}$$

fonksiyon çiftlerinin (8) sisteminin iki çözümü olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Ayrıca (7) determinantı yardımıyla (10) çözümlerinin lineer bağımsız olduğu da görülür. O halde (8) sisteminin genel çözümü (9) şeklindedir.

Homogen Olmayan Lineer Sistemler

Bu kesimde homogen olmayan lineer

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + F_1(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + F_2(t) \end{cases} \tag{11}$$

sistemi ele alınmaktadır, burada a_1, a_2, b_1, b_2, F_1 ve F_2 fonksiyonları bir reel $a \leq t \leq b$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlardır.

Teorem 6. (11) homogen olmayan lineer sistemin bir çözümü

$$\begin{cases} x = x_p(t) \\ y = y_p(t) \end{cases}$$

ve bu sisteme karşılık gelen (3) homogen sisteminin bir çözümü

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} x = x_1(t) + x_p(t) \\ y = y_1(t) + y_p(t) \end{cases}$$

çifti de (11) homogen olmayan sistemin bir çözümüdür.

Tanım 5. (11) homogen olmayan lineer sistemin bir çözümü

$$\begin{cases} x = x_p(t) \\ y = y_p(t) \end{cases}$$

ve karşılık gelen (3) homogen sisteminin lineer bağımsız iki çözümü

$$\begin{cases} x = x_1(t) \\ y = y_1(t) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = x_2(t) \\ y = y_2(t) \end{cases}$$

ise, bu durumda

$$\begin{cases} x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + x_p(t) \\ y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + y_p(t) \end{cases}$$

ifadesine (11) homogen olmayan lineer sistemin bir genel çözümüdür denir, burada c_1 ve c_2 iki keyfi sabittir.