Sabit Katsayılı Lineer Homogen Diferensiyel Denklem Sistemleri

Bu bölümde sabit katsayılı, lineer, homogen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases} \tag{1}$$

sistemi ele alınmaktadır. Burada a_1, a_2, b_1, b_2 katsayıları reel sabitlerdir. (1) sisteminin

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases} \tag{2}$$

formunda üstel çözümlerini arayacağız, burada $A,\ B$ ve λ sabitlerdir. (2) ifadesi (1) sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} A\lambda e^{\lambda t} &= a_1 Ae^{\lambda t} + b_1 Be^{\lambda t} \\ B\lambda e^{\lambda t} &= b_1 Ae^{\lambda t} + b_2 Be^{\lambda t} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} (a_1 - \lambda)A + b_1 B &= 0 \\ a_2 A + (b_2 - \lambda)B &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

bulunur, burada A ve B bilinmeyen sabitlerdir. (3) sistemi açık olarak $A = B = 0$ aşikar çözümüne sahiptir ki bu durum (2) sisteminin $x = y = 0$ aşikar çözümünü ortaya çıkarır.

Diğer taraftan bilinmektedir ki (3) cebirsel sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul katsayılar matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. Yani

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ya da

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \tag{4}$$

olmasıdır, burada λ bilinmeyendir. (4) denklemine (1) sistemine ilişkin *karakteristik denklem* denir. Karakteristik denklemin $\lambda_1,\ \lambda_2$ kökleri *karakteristik kökler* adını alır.

$\lambda = \lambda_1$ (4) karakteristik denkleminin bir kökü olsun. Bu durumda λ_1 değeri (3) sisteminde yerine yazılarak karşılık gelen $A = A_1$ ve $B = B_1$ değerleri bulunur. Böylece (2) göz önüne alınırsa, (1) sisteminin aşikar olmayan bir çözümü

$$\begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = B_1 e^{\lambda_1 t} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi aşağıdaki üç durum göz önüne alınacaktır:

1. λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve birbirinden farklıdır.
2. λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve eşittir.
3. λ_1 ve λ_2 kökleri eşlenik komplekstir.

Teorem 1. (1) sistemine ilişkin (4) karakteristik denkleminin λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve farklı olsun. Bu durumda (1) sistemi

$$\begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = B_1 e^{\lambda_1 t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

şeklinde iki tane aşikar olmayan lineer bağımsız çözüme sahiptir; burada A_1, B_1, A_2, B_2 belli sabitlerdir. Buradan (1) sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Örnek 1.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 3y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \tag{5}$$

sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. (5) sisteminin

$$\begin{cases} x = A e^{\lambda t} \\ y = B e^{\lambda t} \end{cases} \tag{6}$$

formunda çözümü aranırsa, λ bilinmeyenli

$$\begin{aligned} (6-\lambda)A - 3B &= 0 \\ 2A + (1-\lambda)B &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

cebirsel sistemi bulunur. (7) sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

olmasıdır. Bu determinant hesaplanırsa,

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Karakteristik kökler $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$ bulunur. $\lambda = \lambda_1 = 3$ değeri (7) sisteminde yerine yazılarak sistemin aşikar olmayan bir çözümü $A = B = 1$ bulunur. (6) dan (5) sisteminin aşikar olmayan bir çözümü

$$\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{3t} \end{cases} \tag{8}$$

bulunur.
Benzer işlemler $\lambda = \lambda_2 = 4$ değeri için yapılırsa, (5) sisteminin aşikar olmayan diğer bir çözümü

$$\begin{cases} x = 3e^{4t} \\ y = 2e^{4t} \end{cases} \tag{9}$$

bulunur. (8) ve (9) çözümleri lineer bağımsız olup (5) sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} + 3c_2 e^{4t} \\ y = c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{4t} \end{cases}$$

olarak elde edilir, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Teorem 2. (1) sistemine ilişkin (4) karakteristik denkleminin λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve eşit olsun. Bu durumda (1) sistemi

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = (A_1 t + A_2)e^{\lambda t} \\ y = (B_1 t + B_2)e^{\lambda t} \end{cases}$$

formunda iki lineer bağımsız çözüme sahiptir; burada A, B, A_1, B_1, A_2, B_2 belli sabitler olup, A_1 ve B_1 sıfırdan farklı ve $\dfrac{B_1}{A_1} = \dfrac{B}{A}$ dır. Buradan (1) sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{\lambda t} + c_2 (A_1 t + A_2) e^{\lambda t} \\ y = c_1 B e^{\lambda t} + c_2 (B_1 t + B_2) e^{\lambda t} \end{cases}$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Örnek 2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \tag{10}$$

sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. (10) sisteminin

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases}$$

formunda çözümü aranırsa, λ bilinmeyenli

$$\begin{aligned} (4-\lambda)A - B &= 0 \\ A + (2-\lambda)B &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

cebirsel sistemi bulunur. (11) sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

olmasıdır. Buradan karakteristik kökler $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ bulunur. $\lambda = 3$ değeri (11) de yerine yazılarak aşikar olmayan bir çözüm $A = B = 1$ elde edilir. O halde (10) sisteminin aşikar olmayan bir çözümü

$$\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{3t} \end{cases} \tag{12}$$

dir.
(10) sisteminin ikinci bir çözümünü

$$\begin{cases} x = (A_1 t + A_2)e^{3t} \\ y = (B_1 t + B_2)e^{3t} \end{cases} \tag{13}$$

biçiminde arayalım. (13) verilen sistemde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} (A_1 - B_1)t + (A_2 - A_1 - B_2) &= 0 \\ (A_1 - B_1)t + (A_2 - B_1 - B_2) &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin aşikar olmayan bir çözümü $A_1 = B_1 = A_2 = 1,\ B_2 = 0$ dır. O halde (13) den (10) sisteminin ikinci bir çözümü

$$\begin{cases} x = (t+1)e^{3t} \\ y = te^{3t} \end{cases} \tag{14}$$

bulunur. (12) ve (14) çözümleri lineer bağımsızdır. Dolayısıyla (10) sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} x = c_1 e^{3t} + c_2(t+1)e^{3t} \\ y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \end{cases}$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Teorem 3. (1) sistemine ilişkin (4) karakteristik denkleminin kökleri $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ olsun. Bu durumda (1) sistemi

$$\begin{cases} x = e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) \\ y = e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x = e^{at}(A_2 \cos bt + A_1 \sin bt) \\ y = e^{at}(B_2 \cos bt + B_1 \sin bt) \end{cases}$$

formunda iki lineer bağımsız çözüme sahiptir; burada A_1, B_1, A_2, B_2 belli reel sabitler olup (1) sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} x = e^{at}\left[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2(A_2 \cos bt + A_1 \sin bt)\right] \\ y = e^{at}\left[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2(B_2 \cos bt + B_1 \sin bt)\right] \end{cases}$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Örnek 3.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -5x + y \end{cases} \tag{15}$$

sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. (15) sisteminin

$$\begin{cases} x = Ae^{\lambda t} \\ y = Be^{\lambda t} \end{cases}$$

formunda çözümü aranırsa, λ bilinmeyenli

$$\begin{aligned} (3-\lambda)A + 2B &= 0 \\ -5A + (1-\lambda)B &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

cebirsel sistemi bulunur. (16) sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

olmasıdır. Buradan karakteristik kökler $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$ bulunur. $\lambda = 2 + 3i$ değeri (16) da yerine yazılarak aşikar olmayan bir çözüm $A = 2,\ B = -1+3i$ elde edilir. Bu değerler kullanılarak (15) sisteminin kompleks bir çözümü

$$\begin{cases} x = e^{2t}[(2\cos 3t) + i(2\sin 3t)] \\ y = e^{2t}[(-\cos 3t - 3\sin 3t) + i((3\cos 3t - \sin 3t)] \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir. Bu çözümün reel ve sanal kısımları (15) sisteminin çözümleri olduklarından, aynı sistemin iki reel çözümü

$$\begin{cases} x = 2e^{2t}\cos 3t \\ y = -e^{2t}(\cos 3t + 3\sin 3t) \end{cases} \tag{17}$$

ve

$$\begin{cases} x = 2e^{2t}\sin 3t \\ y = e^{2t}(3\cos 3t - \sin 3t) \end{cases} \tag{18}$$

biçimindedir. (17) ve (18) çözümleri lineer bağımsız olduklarından (15) sisteminin genel çözümü

$$\begin{cases} x = 2e^{2t}(c_1\cos 3t + c_2\sin 3t) \\ y = e^{2t}[c_1(-\cos 3t - 3\sin 3t) + c_2(3\cos 3t - \sin 3t)] \end{cases}$$

dir, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.