1. HAFTA

RASGELE VEKTÖRLER VE OLASILIK DAĞILIMLARI

Rasgele Vektör

Elemanları rasgele değişkenler olan vektöre rasgele vektör denir. $X_1, X_2, ..., X_p$ aynı olasılık uzayında tanımlı rasgele değişkenler ise $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$'ye p-boyutlu rasgele vektör denir. Sütun vektörü olarak ise $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_p \end{bmatrix}$ biçiminde gösterilir. Burada $\underline{X}'$, $\underline{X}$ rasgele vektörünün transpozunu göstermektedir. Alta çizilen çizgi vektör olduğunu ifade etmektedir.

p- boyutlu bir rasgele vektör,

$$\begin{aligned} \underline{X} &: \Omega \to \mathbb{R}^p \\ &: w \to \underline{X}'(w) = (X_1(w), X_2(w), ..., X_p(w)) \end{aligned}$$

biçimindedir ve Ω örneklem uzayını göstermektedir. Burada tanımlanan *p*- boyutlu fonksiyonun her bir bileşeni bir rasgele değişken ise, bu *p*- boyutlu fonksiyona *p*- boyutlu bir rasgele vektör (rasgele değişken) denir. *p*- boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(\underline{x}) &: \mathbb{R}^p \to [0,1] \\ &: \underline{x} \to F_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(w : X_1(w) \le x_1, X_2(w) \le x_2, ..., X_p(w) \le x_p)) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Ya da *p*- boyutlu rasgele vektörün dağılım fonksiyonu kısaca

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(\underline{x}) &= F(x_1, x_2, ..., x_p) \\ &= P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_p \le x_p) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Özel olarak da 2- boyutlu bir rasgele vektörün bileşenleri X ve Y rasgele değişkenleri olsun. Yani $\underline{X}' = (X, Y)$ olmak üzere, $\underline{X}$ rasgele vektörün veya X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &: \mathbb{R}^2 \to [0,1] \\ &: (x,y) \to F_{X,Y}(x,y) = P(w : X(w) \le x, Y(w) \le y) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = P(X \le x, Y \le y) \end{aligned}$$

olarak verilir. Bunu kısaca

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= F(x,y) \\ &= P(X \le x, Y \le y) \end{aligned}$$

biçiminde yazacağız ancak asıl tanım hiçbir zaman unutulmayacak. Bu dağılım fonksiyonu da tek değişkenli durumda olduğu gibi benzer özelliklere sahiptir. Ancak çok değişkenli dağılım fonksiyonu için vektörlerde sıralama olmadığından, azalmayan ve artmayan gibi özellikler kullanılamaz. Bununla birlikte çok değişkenli bir dağılım fonksiyonu her bir bileşene göre azalmayan bir fonksiyondur. Ayrıca fonksiyon her iki bileşene göre de sağdan süreklidir ve

$$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0 \ , \quad \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty, y\to-\infty} F(x,y) = 0, \quad \lim_{x\to\infty, y\to\infty} F(x,y) = 1$$

dir.

$F_{X,Y}(x,y)$ X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu ise, X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinal dağılım fonksiyonları

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) \\ &= F_{X,Y}(x,\infty) \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} F_Y(y) &= \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) \\ &= F_{X,Y}(\infty,y) \end{aligned}$$

olarak verilir.

Kesikli Rasgele Vektör ve Kesikli Rasgele Vektörün Olasılık ve Dağılım Fonksiyonu

Bu kısımda öncelikle kesikli rasgele vektörler için ifadeler verildikten sonra, sürekli rasgele vektörler için de benzer ifadeler verilecektir.

Tanım: p-boyutlu $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele vektörünün elemanları $(X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele değişkenleri p-boyutlu gerçek (reel) uzayda $(x_1, x_2, ..., x_p)$ noktalarının sayılabilir değerlerini alıyorsa, $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$'e kesikli rasgele vektör denir.

Tanım: (Kesikli rasgele vektörün (çok değişkenli rasgele değişkenin) olasılık fonksiyonu)

$\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ p-boyutlu kesikli bir rasgele vektör ise, $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$'in kesikli çok değişkenli olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}}) &= f_{X_1, X_2, ..., X_p}(x_1, x_2, ..., x_p) \\ &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_p = x_p) \end{aligned}$$

ile gösterilir. Burada $\underline{\mathrm{x}}' = (x_1, x_2, ..., x_p)$, $\underline{X}' = (X_1, X_2, ..., X_p)$ rasgele vektörünün gözlem değeridir. Sonuçları daha iyi görüp ve kavramak için özel olarak iki boyutlu (p=2) durumunu göz önüne alalım.

$\underline{X}' = (X, Y)$ olmak üzere, $\underline{X}$ rasgele vektörün ortak olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}}) &= f_{X,Y}(x, y) \\ &= P(X = x \text{ } ve \text{ } Y = y) \\ &= P(X = x \text{ , } Y = y) \end{aligned}$$

biçiminde ya da daha genel olarak

$$f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}}) = P(\underline{X} = \underline{\mathrm{x}})$$

olarak da ifade edilir. Ortak olasılık fonksiyonu $f_{X,Y}(x, y)$

i) $\forall (x, y)$ için $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$

ii) $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x, y) = 1$

özelliklerine sahiptir.

Örnek: $\underline{X}' = (X, Y)$ rasgel vektörüne ilişkin ortak olasılık fonksiyonundan ortak olasılıkları bulunuz.

$f_{X,Y}(x,y)$		y = 0	1	2	3	**Toplam**
x	0	0.05	0.05	0.10	0.00	**0.20**
	1	0.05	0.10	0.25	0.10	**0.50**
	2	0.00	0.15	0.10	0.05	**0.30**
Toplam		**0.10**	**0.30**	**0.45**	**0.15**	**1**

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(X=0, Y=0) &= f_{X,Y}(0,0) \\ &= 0.05 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} P(X=2, Y=1) &= f_{X,Y}(2,1) \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

dır.

Teorem : X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılım ve olasılık fonksiyonlarındaki bilgi eşdeğerdir. Bu durum p-boyutlu rasgele değişkenlere de genişletilebilir.

İspat : $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ (X, Y)'nin olası değerleri olsun. $f_{X,Y}(x,y)$ verildiğinde $F_{X,Y}(x,y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_i \le y} f_{X,Y}(x_i, y_i)$ dir. Diğer yandan $F_{X,Y}(x,y)$ verildiğinde (X,Y)'nin olası bir (x_i, y_i) değeri için

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x_i, y_i) &= P(X = x_i, Y = y_i) \\ &= P(X \le x_i, Y = y_i) - P(X < x_i, Y = y_i) \\ &= P(X \le x_i, Y \le y_i) - P(X \le x_i, Y < y_i) - P(X < x_i, Y \le y_i) + P(X < x_i, Y < y_i) \\ &= F_{X,Y}(x_i, y_i) - \lim_{0<h\to 0} F_{X,Y}(x_i, y_i - h) - \lim_{0<h\to 0} F_{X,Y}(x_i - h, y_i) + \lim_{0<h\to 0} F_{X,Y}(x_i - h, y_i - h) \end{aligned}$$

dır.

Tanım: X ve Y kesikli rasgele değişkenlerine ilişkin ortak dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= F(x,y) \\ &= P(X \le x, Y \le y) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu dağılım fonksiyonu

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{\{x^*:x^*\le x\}} \sum_{\{y^*:y^*\le y\}} P(X = x^*, Y = y^*)$$
$$= \sum_{x^*\le x} \sum_{y^*\le y} F_{X,Y}(x^*, y^*)$$

biçiminde verilir.

Örnek: Örnek 1 de verilen olasılık dağılımı için $F_{X,Y}(1,2) = P(X \le 1, Y \le 2)$ değerini bulunuz.

$f_{X,Y}(x,y)$		y				**Toplam**
		0	1	2	3	
x	0	0.05	0.05	0.10	0.00	**0.20**
	1	0.05	0.10	0.25	0.10	**0.50**
	2	0.00	0.15	0.10	0.05	**0.30**
Toplam		**0.10**	**0.30**	**0.45**	**0.15**	**1**

Çözüm:

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(1,2) &= P(X \le 1, Y \le 2) \\ &= P(X=0,Y=0) + P(X=0,Y=1) + P(X=0,Y=2) \\ &\quad + P(X=1,Y=0) + P(X=1,Y=1) + P(X=1,Y=2) \\ &= 0.05 + 0.05 + 0.10 + 0.05 + 0.10 + 0.25 \\ &= 0.60 \end{aligned}$$

Marjinal Olasılık Fonksiyonları

$f_{X,Y}(x,y)$ ortak olasılık fonksiyonu verildiğinde X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinal (bireysel) olasılık fonksiyonları bulunabilir.

Tanım: X kesikli bir rasgele değişken olmak üzere, X' in olasılık fonksiyonu

$$f_X(x) = P(X = x)$$

ile verilir. Genel olarak $\underline{X}' = (X, Y)$ vektörünün elemanı X rasgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) \quad \text{ya da} \quad f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$$

olarak bulunur.

Benzer olarak *Y* rasgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonu

$$P(Y=y)=\sum_x P(X=x,Y=y) \quad \text{ya da} \quad f_Y(y)=\sum_x f_{X,Y}(x,y)$$

biçimindedir.

p-boyut için genelleme yapılırsa, $\underline{X}'=(X_1,X_2,...,X_p)$ rasgele vektörünün dağılım fonksiyonu

$$F_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}})=F_{X_1,X_2,...,X_p}(x_1,x_2,...,x_p)$$

olmak üzere X_i rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_{X_i}(x_i)=\lim_{x_1\to\infty,...,x_{i-1}\to\infty,x_{i+1}\to\infty,...,x_p\to\infty} F_{X_1,X_2,...,X_p}(x_1,x_2,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_p)$$

olarak verilmektedir. Benzer biçimde X_i ve X_k rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu

$$F_{X_i,X_k}(x_i,x_k)=\lim_{x_i \text{ ve } x_k \text{ hariç diğer tüm } x\to\infty} F_{X_1,X_2,...,X_p}(x_1,x_2,...,x_p)$$

olarak elde edilir.

$\underline{X}'=(X_1,X_2,...,X_p)$ rasgele vektörünün olasılık fonksiyonu

$$f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}})=f_{X_1,X_2,...,X_p}(x_1,x_2,...,x_p)$$

olmak üzere X_i rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$f_{X_i}(x_i)=\sum_{x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_p} f_{\underline{X}}(\underline{\mathrm{x}})$$

olarak elde edilir. Benzer biçimde X_i ve X_k rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu

$$f_{X_i,X_k}(x_i,x_k)=\sum_{\substack{x_i \text{ve } x_k \text{hariç diğer} \\ \text{tüm } x \text{ ler üzerinden toplam}}} f_{\underline{X}}(\underline{x})$$

olarak elde edilir. Ancak marjinal dağılım ve olasılık fonksiyonlarından $\underline{X}'=(X_1,X_2,...,X_p)$ rasgele vektörünün ortak dağılım ve olasılık fonksiyonları her zaman elde edilemez.

Örnek: Örnek 1 de verilen ortak olasılık fonksiyonundan X ve Y rasgele değişkenlerinin marjinal olasılık fonksiyonlarını bulunuz.

$f_{X,Y}(x,y)$		y				**Toplam**
		0	1	2	3	
x	0	0.05	0.05	0.10	0.00	**0.20**
	1	0.05	0.10	0.25	0.10	**0.50**
	2	0.00	0.15	0.10	0.05	**0.30**
Toplam		**0.10**	**0.30**	**0.45**	**0.15**	**1**

Çözüm:

$$\begin{aligned} f_X(x=0) &= \sum_{y=0}^{3} f_{X,Y}(x=0,y) \\ &= f_{X,Y}(x=0,y=0)+f_{X,Y}(x=0,y=1)+f_{X,Y}(x=0,y=2)+f_{X,Y}(x=0,y=3) \\ &= 0.05+0.05+0.10+0.00 \\ &= 0.20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(x=1) &= \sum_{y=0}^{3} f_{X,Y}(x=1,y) \\ &= f_{X,Y}(x=1,y=0)+f_{X,Y}(x=1,y=1)+f_{X,Y}(x=1,y=2)+f_{X,Y}(x=1,y=3) \\ &= 0.05+0.10+0.25+0.10 \\ &= 0.50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(x=2) &= \sum_{y=0}^{3} f_{X,Y}(x=2,y) \\ &= f_{X,Y}(x=2,y=0)+f_{X,Y}(x=2,y=1)+f_{X,Y}(x=2,y=2)+f_{X,Y}(x=2,y=3) \\ &= 0.00+0.15+0.10+0.05 \\ &= 0.30 \end{aligned}$$

olmak üzere X rasgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonu,

x	0	1	2	
$f_X(x)$	0.20	0.50	0.30	1

olarak elde edilir.

Benzer şekilde

$$f_Y(y=0)=\sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x,y=0)$$
$$=f_{X,Y}(x=0,y=0)+f_{X,Y}(x=1,y=0)+f_{X,Y}(x=2,y=0)$$
$$=0.05+0.05+0.00$$
$$=0.10$$

$$f_Y(y=1)=\sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x,y=1)$$
$$=f_{X,Y}(x=0,y=1)+f_{X,Y}(x=1,y=1)+f_{X,Y}(x=2,y=1)$$
$$=0.05+0.10+0.15$$
$$=0.30$$

$$f_Y(y=2)=\sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x,y=2)$$
$$=f_{X,Y}(x=0,y=2)+f_{X,Y}(x=1,y=2)+f_{X,Y}(x=2,y=2)$$
$$=0.10+0.25+0.10$$
$$=0.45$$

$$f_Y(y=3)=\sum_{x=0}^{2} f_{X,Y}(x,y=3)$$
$$=f_{X,Y}(x=0,y=3)+f_{X,Y}(x=1,y=3)+f_{X,Y}(x=2,y=3)$$
$$=0.00+0.10+0.05$$
$$=0.15$$

olmak üzere *Y* rasgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonu,

y	0	1	2	3	
$f_Y(y)$	0.10	0.30	0.45	0.15	1

olarak elde edilir.

Koşullu Olasılık Fonksiyonları

Tanım: *X* ve *Y* ortak olasılık fonksiyonu $f_{X,Y}(x,y)$ olan kesikli rasgele değişkenler olsun. *Y*'nin *y* değerini aldığı verildiğinde. *X*'in koşullu olasılık fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
f_{X/Y}(x/y) &= P(X = x/Y = y) \\
&= \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} \\
&= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad , \quad f_Y(y) > 0
\end{aligned}
$$

dir. $f_Y(y) = 0$ için $f_{X,Y}(x,y)$ tanımsızdır. Benzer biçimde *X*'in *x* değerini aldığı verildiğinde, *Y*'nin koşullu olasılık fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
f_{Y/X}(y/x) &= P(Y = y/X = x) \\
&= \frac{P(Y = y, X = x)}{P(Y = y)} \\
&= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad , \quad f_X(x) > 0
\end{aligned}
$$

dir ve $f_X(x) = 0$ için $f_{X,Y}(x,y)$ tanımsızdır.

$f_{X/Y}(x/y)$ koşullu olasılık fonksiyonu *x*'in bir fonksiyonudur. Genelde *y* sabit değerdir. Örneğin $f_{X/Y}(x/Y = -2)$ veya $f_{X/Y}(x/Y = 3)$ dir. Burada *x* bir değişkendir ve *X*'in tüm değerlerini alır.

X ve *Y* kesikli rasgele değişkenler olduğundan, bu değişkenler bir çok değere sahiptir. Yani *X*; $x_1, x_2, ...$ ve $y_1, y_2, ...$ sabit değerlerini alabilirler. $f_X(x) > 0$ ise belirli bir *i* için $x = x_i$ ve $f_X(x_i) = P(X = x_i)$ dir. Aynı şekilde $f_{X,Y}(x_i, \mathrm{y}_i) = P(X = x_i, Y = y_i)$ dir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
f_{X/Y}(x_i/y_j) &= \frac{f(X = x_i, Y = y_j)}{f(Y = y_j)} \\
&= \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \\
&= P(X = x_i / Y = y_j)
\end{aligned}
$$

dir. $f_{X/Y}(x/y)$ kesikli koşullu olasılık fonksiyonudur ve kesikli olasılık fonksiyonunun özelliklerine sahiptir.

Yani,

i) $f_{X/Y}(x/y)$ ve $f_Y(y)$ negatif olmadığından, $f_{X/Y}(x/y)$ de bütün x ve y için pozitiftir.

ii)

$$\sum_i f_{X/Y}(x_i / y) = \sum_i \frac{f_{X,Y}(x_i, y)}{f_Y(y)}$$
$$= \frac{1}{f_Y(y)} \sum_i f_{X,Y}(x_i, y)$$
$$= \frac{1}{f_Y(y)} f_Y(y)$$
$$= 1$$

dir. Burada *X*'in alacağı tüm değerler üzerinden toplam alınmıştır. Yani *X*'in marjinal olasılık fonksiyonu, *Y*'nin olası tüm değerleri üzerinden, *X* ve *Y*'nin ortak olasılık fonksiyonunun toplamından elde edilmiştir. $f_{X/Y}(x/y)$ fonksiyonu *Y*'nin verilen bir y değeri için *X*'in değerlerinin nasıl dağıldığını verir. $Y = y$ verildiğinde, *X*'in koşullu dağılım fonksiyonu, kesikli olasılık ve dağılım fonksiyonu arasındaki ilişkiden iki ortak kesikli rasgele değişken için belirlenebilir.

Tanım: *X* ve *Y* ortak kesikli rasgele değişkenler ise $Y = y$ verildiğinde, *X*'in koşullu dağılım fonksiyonu $f_Y(y) > 0$ için,

$$F_{X/Y}(x/y) = P(X \leq x / Y = y)$$

biçiminde tanımlanır ve

$$F_{X/Y}(x/y) = \sum_{\{i: x_i \leq x} f_{X/Y}(x_i / y)$$

dir.

Örnek: Örnek 1 de $Y = 2$ verildiğinde *X*'in koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.

$f_{X,Y}(x,y)$		y: 0	1	2	3	Toplam
x	0	0.05	0.05	0.10	0.00	**0.20**
	1	0.05	0.10	0.25	0.10	**0.50**
	2	0.00	0.15	0.10	0.05	**0.30**
Toplam		**0.10**	**0.30**	**0.45**	**0.15**	**1**

Çözüm: $Y=2$ verildiğinde X'in koşullu olasılık fonksiyonunu,

x	0	1	2	**Toplam**
$f_{X/Y}(x/y=2)$	$\frac{0.10}{45}=\frac{2}{9}$	$\frac{0.25}{45}=\frac{5}{9}$	$\frac{0.10}{45}=\frac{2}{9}$	**1**

olarak bulunur, burada $\dfrac{f_{X/Y}(x=0,y=2)}{f_Y(y=2)}=\dfrac{0.10}{45}=\dfrac{2}{9}$ dir.

Benzer şekilde $X=0$ verildiğinde Y'nin koşullu olasılık fonksiyonunu,

y	0	1	2	3	**Toplam**
$f_{Y/X}(y/x=0)$	$\frac{0.05}{0.20}=\frac{1}{4}$	$\frac{0.05}{0.20}=\frac{1}{4}$	$\frac{0.10}{0.20}=\frac{2}{4}$	$\frac{0.00}{0.20}=0$	**1**

olarak bulunur, burada $\dfrac{f_{Y/X}(x=0,y=0)}{f_X(x=0)}=\dfrac{0.05}{0.20}=\dfrac{1}{4}$

dır.

Tanım : $\underline{X}'=(X_1,X_2,...,X_p)$ p-boyutlu bir rasgele vektör, $\underline{X}_r'=(X_{i1},X_{i2},...,X_{ir})$ ve $\underline{X}_s'=(X_{j1},X_{j2},...,X_{js})$, $\underline{X}'=(X_1,X_2,...,X_p)$ vektörünün ortak olmayan iki kümesi olsun. $\underline{X}_s'=(X_{j1},X_{j2},...,X_{js})$ s-boyutlu rasgele vektörün $\underline{\mathrm{x}}_s'=(x_{j1},x_{j2},...,x_{js})$ değerleri verildiğinde, $\underline{X}_r'=(X_{i1},X_{i2},...,X_{ir})$ r-boyutlu rasgele vektörün koşullu dağılımı

$$f_{\underline{X}_r'/\underline{X}_s'}(\underline{\mathrm{x}}_r'/\underline{\mathrm{x}}_s')=\frac{f_{\underline{X}'}(\underline{\mathrm{x}}')}{f_{\underline{X}_s'}(\underline{\mathrm{x}}_s')}$$

veya

$$f_{X_{i1},X_{i2},...,X_{ir}/X_{j1},X_{j2},...,X_{js}}(x_{i1},x_{i2},...,x_{ir}/x_{j1},x_{j2},...,x_{js})=\frac{f_{X_{i1},X_{i2},...,X_{ir},X_{j1},X_{j2},...,X_{js}}(x_{i1},x_{i2},...,x_{ir},x_{j1},x_{j2},...,x_{js})}{f_{X_{j1},X_{j2},...,X_{js}}(x_{j1},x_{j2},...,x_{js})}$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek: $\underline{X}' = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ kesikli rasgele vektörü için;

a. $\underline{X}'_{r=3} = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}) = (X_1, X_2, X_4)$ ve $\underline{X}'_{s=2} = (X_{j1}, X_{j2}) = (X_3, X_5)$ alındığında

b. $\underline{X}'_{r=2} = (X_{i1}, X_{i2}) = (X_1, X_2)$ ve $\underline{X}'_{s=2} = (X_{j1}, X_{j2}) = (X_3, X_5)$ alındığında

$f_{\underline{X}'_r/\underline{X}'_s}(\underline{\mathrm{x}}'_r / \underline{\mathrm{x}}'_s) = \dfrac{f_{\underline{X}'}(\underline{\mathrm{x}}')}{f_{\underline{X}'_s}(\underline{\mathrm{x}}'_s)}$ 'i elde ediniz.

Çözüm:

a)
$$f_{\underline{X}'_{r=3}/\underline{X}'_{s=2}}(\underline{\mathrm{x}}'_{r=3} / \underline{\mathrm{x}}'_{s=2}) = \frac{f_{\underline{X}'}(\underline{\mathrm{x}}')}{f_{\underline{X}'_{s=2}}(\underline{\mathrm{x}}'_{s=2})}$$

$$f_{X_1,X_2,X_4/X_3,X_5}(x_1, x_2, x_4 / x_3, x_5) = \frac{f_{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}{f_{X_3,X_5}(x_3, x_5)}$$

dir ve

b)
$$f_{\underline{X}'_{r=2}/\underline{X}'_{s=2}}(\underline{\mathrm{x}}'_{r=2} / \underline{\mathrm{x}}'_{s=2}) = \frac{f_{\underline{X}'}(\underline{\mathrm{x}}')}{f_{\underline{X}'_{s=2}}(\underline{\mathrm{x}}'_{s=2})}$$

$$f_{X_1,X_2/X_3,X_5}(x_1, x_2 / x_3, x_5) = \frac{f_{X_1,X_2,X_3,X_5}(x_1, x_2, x_3, x_5)}{f_{X_3,X_5}(x_3, x_5)}$$

olarak elde edilir.

Örnek: Bir böcek bir yaprak üzerine yumurtalarını bırakmıştır. *X* rasgele değişkeni, böceğin bıraktığı yumurta sayısını göstersin ve dağılımı $X \sim P(\lambda)$ olsun. Bırakılan her yumurtanın diğerlerinden bağımsız olarak hayatta kalması olasılığı *p* olsun. *Y* rasgele değişkeni hayatta kalan yumurtaların sayısını göstermek üzere

a) *X* ve *Y* rasgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonunu

b) *Y* rasgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonunu

bulunuz.

Çözüm:

a) Yumurtaların verilen sabit bir x sayısı için, diğerlerinden bağımsız olarak hayatta kalma olasılığı p dir. Böylece x yumurta sayısı ile işe başlanır ise $Y \sim Binom(x, p)$ dir. Buradan $X = x$ verildiğinde, Y'nin koşullu dağılımı $(Y / X = x) \sim Binom(x, p)$ dir. Yani $(Y / X) \sim Binom(X, p)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} f_{Y/X}(y/x) &= P(Y = y / X = x) \\ &= \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \quad , \quad y = 0,1,\ldots,x \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= P(X = x, Y = y) \\ &= P(Y = y / X = x,) P(X = x) \\ &= f_{Y/X}(y/x) f_X(x) \end{aligned}$$

dir. $X \sim P(\lambda)$ olduğundan $f_X(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0,1,\ldots$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\ &= \frac{x!}{(x-y)!\,y!} p^y (1-p)^{x-y} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\ &= \frac{p^y (1-p)^{x-y} e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-y)!\,y!} \quad ; \quad x = 0,1,\ldots \;,\; y = 0,1,\ldots,x \end{aligned}$$

b)

$$f_Y(y) = \sum_{x=y}^{\infty} f_{X,Y}(\mathrm{x}, y)$$

dir.

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=y}^{\infty} \frac{p^y (1-p)^{x-y} e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-y)!\,y!} \\ &= \frac{p^y e^{-\lambda}}{y!} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{(1-p)^{x-y} \lambda^x}{(x-y)!} \end{aligned}$$

$m = (x-y)$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{p^y}{y!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1-p)^m \lambda^{m+y}}{(m)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^y}{y!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{(m)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^y}{y!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^y}{y!} e^{-\lambda p} \quad , \quad y=0,1,2,...
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca $x < y$ için $f_{X,Y}(x,y) = 0$. Buradan, *Y*'nin marjinal dağılımı $Y \sim P(\lambda p)$ dir.