BÖLÜM-VI: DÖRT-TENSÖRLER ve VAKUMDA ELEKTROMANYETİZMA

1. Tensörler
2. Dört-Potansiyel ve Dört-Akım Yoğunluğu
3. Tensör Formda Maxwell Denklemleri

1. Tensörler

Bir tensör, 4-vektör notasyonunun genelleştirilmiş bir halidir; matematiksel bir araçtır. Relativistik parçacık mekaniği için 4-vektörler yeterlidir. Ancak elektromanyetizmada 4-vektörler yeterli değildir.

Elektrik Alan + Manyetik Alan ➔ Tek bir EM alan tensörü ile tanımlanabilir

- Tensörler tüm boyutlardaki uzaylarda vardır. Özel görelilikte ilgilendiğimiz tensörler Minkowski uzayı ile ilgilidir ve 4 boyutludur. Tensör teorisinde indisler doğal olarak açığa çıkar. Tekrarlayan indisler üzerinden toplam vardır. Tekrarlı indislere ***sağır (dummy) indis*** denir. Tekrarlanmayan indislere ***serbest indis*** denir. Serbest indisler bir denklemin her teriminde olmalıdır. Serbest indis sayısı tensörün rankını (mertebesini) belirler.

  T^{ij} ➔ rank 2 kontravaryant tensör

  T_{ijk} ➔ rank 3 kovaryant tensör

  $T^{ik}{}_{jklm}$ ➔ rank 4 karma tensör (i,j,l ve m serbest indis, k tekrarlanıyor)

- $n \to$ tensörün tanımlandığı uzayın boyutu ve $m \to$ tensörün rankı olmak üzere, bir tensörün bileşenlerinin (ya da elemanlarının) sayısı $\boldsymbol{n^m}$ ile tanımlanır.

- Bir tensör, indis değiş tokuşu altında işaret değiştirmiyorsa simetrik tensör, değiştiriyorsa antisimetrik tensördür.

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} \quad \Rightarrow Simetrik$$
$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} \quad \Rightarrow Antisimetrik$$

- 4-boyutlu uzayda rank 2 bir tensörün toplam 16 tane elemanı vardır. 4-boyutlu uzayda rank 2 bir ***simetrik tensörün bağımsız eleman sayısı 10*** ve 4-boyutlu uzayda rank 2 bir antisimetrik tensörün ***bağımsız eleman sayısı 6*** *dır*. Elektromanyetik alan 6 bileşenli olduğu için (3 elektrik alan bileşeni, 3 de manyetik alan bileşeni), EM alan tensörü rank 2 antisimetrik bir tensörle ifade edilir.

2. Dört-Potansiyel ve Dört-Akım Yoğunluğu

<u>4-potansiyel (4-elektromanyetik potansiyel)</u>

$$A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) = (A^0, A^1, A^2, A^3) = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$$

⇨ *Elektromanyetizmanın potansiyel formülasyonu:* Elektrik ve manyetik alanlar ile potansiyeller (skaler potansiyel ve vektör potansiyel) arasındaki ilişki

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ϕ: Skaler potansiyel $\vec{A}$: Vektör potansiyel

⇨ Bileşenler formunda;

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{x}^i \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{x}^i \varepsilon^{ijk} \frac{\partial A^k}{\partial x^j}$$

<u>4-akım yoğunluğu</u>

$$J^{\mu} = \rho_0 U^{\mu} = \rho_0 \left[\gamma(u)(c, \vec{u})\right] = \left(\rho_0 \gamma(u) c, \rho_0 \gamma(u) \vec{u}\right)$$

$$\rho = \rho_0 \gamma(u) \qquad \rho_0 : has\ yük\ yoğunluğu$$

$$J^{\mu} = (\rho c, \rho \vec{u}) = (J^0, \vec{J})$$

3. Tensör Formda Maxwell Denklemleri

- ***<u>Elektromanyetik alan tensörü:</u>***

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} F^{\sigma\lambda}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Dual Tensör

$F^{\mu\nu}$'de $\dfrac{E}{c} \rightarrow B$

$B \rightarrow -\dfrac{E}{c}$ *yazılarak elde edilir.*

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau}$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

- **Maxwell Denklemleri:**

Kaynaklı	$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu$
Diğer	$\partial_\nu G^{\nu\mu} = 0$

- **EM alan tensörünün dönüşümü** *(rank 2 bir tensörün dönüşümü)*

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\lambda F^{\mu\nu}$$

⇨ *EM alan tensörünün dönüşümünden elektrik ve manyetik alanların dönüşümü şu şekilde elde edilir (S' çerçevesi S çerçevesine göre +x' yönünde v hızı ile ilerliyor):*

$E_x' = E_x$	$E_y' = \gamma(E_y - vB_z)$	$E_z' = \gamma(E_z + vB_y)$
$B_x' = B_x$	$B_y' = \gamma\left(B_y + \dfrac{v}{c^2} E_z\right)$	$B_z' = \gamma\left(B_z - \dfrac{v}{c^2} E_y\right)$

!!! E ve B nin hareket yönündeki bileşeni değişmez.

Bazı invaryant nicelikler:

i. $J^{\mu}J_{\mu} = \left(\gamma(u)\right)^2 \rho_0{}^2(c^2 - u^2) = c^2\rho_0{}^2$

ii. $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(B^2 - \dfrac{E^2}{c^2})$

iii. $F_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = -4(\vec{E}\cdot\vec{B})/c$